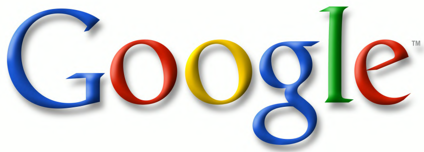


Involuties op rationale krommen.



Joh. A. Vreeswijk Jr.

La Bibliothèque de l' Université d' Utrecht,
a l'honneur de transmettre à la Bibliothèque
de votre illustre Institution:

14 Dissertations 1907/8

1 Jaarboek 1907/8

En même temps elle vous prie d'accepter ses remerciments pour le dernier envoi, que vous avez bien voulu lui adresser.

Utrecht

Octr 1908

Le Bibliothécaire de l'Université

J. F. van Someren

INVOLUTIES OP RATIONALE KROMMEN.

Involuties op rationale krommen

PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD

VAN

Doctor in de Wis- en Natuurkunde

AAN DE RIJKS-UNIVERSITEIT TE UTRECHT

NA MACHTIGING VAN DEN RECTOR MAGNIFICUS

Dr. J. M. S. BALJON

HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER GODGELEERDHEID

VOLGENS BESLUIT VAN DEN SENAAT DER UNIVERSITEIT

TEGEN DE BEDENKINGEN VAN DE

FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE

TE VERDEDIGEN

op Dinsdag 9 Mei 1905 des namiddags ten 3 ure

DOOR

JOHANNES ADRIANUS VREESWIJK Jr

geboren te GOUDA

Stoomdrukkerij „de Industrie" J. VAN DRUTEN - Utrecht

1905

Aan het einde van mijn proefschrift gekomen is het mij een aangename taak U, Hoogleeraren der Wis- en Natuurkundige Faculteit, mijn dank te betuigen voor het onderwijs, dat ik van U mocht ontvangen.

In het bijzonder voel ik mij verplicht aan U, Hooggeleerde DE VRIES, Hooggeachte Promotor, door Uwe voortdurende belangstelling in mijn werk en door de vele raadgevingen die ik in verschillende omstandigheden van U ontving.

INHOUD.

Bladz.

HOOFDSTUK I.

§ 1 en 2. De quadratische involutie op een rechte lijn. 1
§ 3. De involutie van den P^{en} graad op een rechte . 6
§ 4. De involutie van den P^{en} graad op eene kegelsnede. 8
§ 5. Constructies 11
§ 6. Duale beschouwingen over involuties op een kegelsnede 12
§ 7. De I_p op een willekeurige rationale vlakke kromme 14

HOOFDSTUK II.

§ 1 en 2. De algebraïsche verwantschap 17
§ 3. De involutorische of symmetrische verwantschap . 24
§ 4. Collocale stelsels. 25
§ 5 en 6. Involuties van hoogeren rang. 26
§ 7. Collocale involuties van hoogeren rang 32
§ 8, De I_3^2 op een cubische vlakke kromme met een lus. 34

HOOFDSTUK III.

§ 1. De involutie I_p op een willekeurige rationale vlakke kromme 38
§ 2. De involutie I_p op een willekeurige rationale vlakke kromme 42
§ 3. De involutie I_p der raaklijnen aan een rationale vlakke kromme. 44
§ 4. De involutie I_2 op een rationale vlakke C_3 . . . 46
§ 5. De involutie I_3 op een rationale vlakke C_3 . . . 47
§ 6 en 7. De involutie I_2 op een kromme van de vierde orde met drievoudig punt 51
§ 8. De involutie I_3 op een kromme van de vierde orde met een drievoudig punt 57

Bladz.
§ 9, 10 en 11. Insnijdende bundels 58
§ 12. Fundamentale involuties op rationale krommen van den vijfden graad 64
§ 13. Over stelsels van kegelsneden die bij involuties op rationale krommen behooren 67

HOOFDSTUK IV.

§ 1. Involuties op rationale ruimtekrommen 71
§ 2 en 3. Het regelvlak (P_1 P_2). 71
§ 4. Het trisecanten oppervlak. 75
§ 5. De vlakke doorsnede van het regelvlak (P_1 P_2). 76
§ 7. Toepassing voor $n = 3$. 77
§ 8. De I_2 op een rationale R_3 79
§ 9. Toepassing voor $n = 4$. 80
§ 10. De involutie I_p 81
§ 11. Het geslacht van het regelvlak (P_1 P_2) 82
§ 12. De ruimtekromme waaraan de vlakken (P_1 P_2 P_3) osculeeren 83
§ 13. Dualistische beschouwingen 86
§ 14. Kubische involuties van den eersten en tweeden graad op kubische ruimtekrommen 87

HOOFDSTUK V.

§ 1. Rationale Ruimtekrommen 94
§ 2. Centrale projectie der R_n 95
§ 3. Raakvlakken en raaklijnen 96
§ 4. Osculatievlakken en Dubbelraakvlakken . . . 98
§ 5. Oppervlak der bisecanten, rustende op 'n rechte lijn 99
§ 6. Oppervlak der Trisecanten 101
§ 7. Normalen der R_n 102

HOOFDSTUK I.

§ 1. De quadratische involutie op een rechte lijn.

epaling. «Hebben wij een stelsel van puntenparen $P_1 P_2$, zoo dat P_1 en P_2 elkaar ondubbelzinnig bepalen, dan noemen wij zoo'n puntenstelsel eene *involutie* van den *tweeden graad* of eene I_2.»

Een bundel kegelsneden bepaalt op een willekeurige rechte l zoo'n involutie. Immers neemt men op l een punt dat we P_1 noemen dan bepaalt dit punt met de vier grondpunten $A_1 A_2 A_3 A_4$ van den bundel een kegelsnede die l, behalve in P_1, nog in een tweede punt snijdt. Dit laatste punt noemen wij nu P_2. Het is, wanneer P_1 bekend is, geheel ondubbelzinnig aangewezen. De kegelsnede $(A_1 A_2 A_3 A_4) P_1 P_2$ is echter ook bepaald zoodra het punt P_2 gegeven is. Dan vinden wij bij P_2 het zelfde punt P_1 waarvan wij vroeger uitgingen.

Men zegt nu dat de punten P_1 en P_2 aan elkaar zijn «*toegevoegd*», dat wil dus zeggen dat wanneer we één van die punten weten, het andere ook aangewezen is.

Het is duidelijk dat voor alle puntenparen door de verschillende exemplaren van den kegelsnedenbundel op l ingesneden, hetzelfde kan gezegd worden en dat we op die manier op de lijn l een stelsel van oneindig veel puntenparen hebben verkregen, dat voldoet aan de bepaling van eene *involutie* van den *tweeden graad* aan het begin van deze § gesteld.

De lijn l wordt de *drager* der quadratische involutie I_2 genoemd.

We kunnen gemakkelijk drie paren eener I_2 verkrijgen door ons te bedienen van de drie ontaarde kegelsneden gaande door de vier basispunten.

Door middel van de *algebra* laat zich het begrip van involutie even goed verstaan. Voor de algebraïsche voorstelling der involutie kiezen wij op de drager l een willekeurig punt N dat nulpunt van telling wordt voor de afstanden of abscissen van alle punten der lijn l tot aan dat nulpunt N. De stand van een punt P_1 op l is dan door de abscis x bekend, terwijl evenzoo de plaats van een punt P_2 door de bijbehoorenden abscis y kan gegeven worden.

Bestaat nu tusschen de bedoelde grootheden x en y de betrekking

$$a x y + b (x + y) + c = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

waarin a, b en c bepaalde coëfficiënten zijn, dan blijkt onmiddellijk dat wanneer het punt P_1 en dus de x bekend is, de y ondubbelzinnig wordt gevonden en andersom, wat weder hierop neerkomt dat de punten P_1 en P_2 elkaar volkomen bepalen, of m. a. w. dat P_1 en P_2 «toegevoegde» punten zijn. Maar het is eveneens duidelijk dat welk punt men ook op l als P_1 kiest, men daarbij steeds één punt P_2 zal vinden en dat dit laatste punt weder het eerste kan opleveren.

De beschouwde toestand van de oneindig vele punten eener rechte lijn l is slechts een bijzonder geval eener meer algemeene gedachte. Het kan n.l. zijn dat aan het punt P is toegevoegd het punt Q, maar dat nu het punt Q *niet* het punt P aangeeft maar een ander punt van l. Er bestaan dan eigenlijk twee puntenstelsel op l: het stelsel (P) en het stelsel (Q). Men noemt ze *collocaal*, omdat zij op denzelfden drager zijn gelegen. Elk punt van l is op te vatten als een punt P van het éene stelsel en wijst dan het toegevoegde punt Q van het andere stelsel aan. Maar noem ik dat eerste punt Q' ($\equiv$ P) dan hoort er een punt P' bij dat niet het genoemde punt Q is. Wel zijn de punten der lijn l één aan één aan elkaar toegevoegd, welk verband men een *projectief* verband noemt, of ook projectieve verwantschap. Door eene *bilineaire* vergelijking van de gedaante

$$a x y + b x + c y + d = 0 \quad . \quad , \quad . \quad . \quad (2)$$

is zij volkomen bepaald, wat na het gezegde geen verdere

toelichting behoeft. Stelt men nu in deze laatste vergelijking de coëfficiënten van x en y aan elkaar gelijk, dus $b \equiv c$, dan komt vergelijking (1) te voorschijn, waarmee is aangetoond dat de quadratische involutie een bijzonder geval is van eene verwantschap één aan één, gedacht tusschen de oneindig vele punten eener rechte lijn.

§ 2. Wij keeren terug tot de vergelijking (1) der quadratische involutie, en schrijven die in den vorm

$$x\,y + \frac{b}{a}(x + y) + \frac{c}{a} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

of

$$\left(x + \frac{b}{a}\right)\left(y + \frac{b}{a}\right) = \frac{b^2}{a^2} - \frac{c}{a}$$

Na verschuiving van het nulpunt over een afstand $\frac{b}{a}$ vinden wij in de nieuwe coördinaten voor de vergelijking der I_2.

$$\xi\,\eta = \text{constante} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

ten opzichte van het nieuwe nulpunt M. Onderstellen we het geval $\xi = \eta$, dan wordt (3)

$$\xi^2 = \text{constante}.$$

$$\xi = \pm \sqrt{\text{constante}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

waaruit blijkt, dat er steeds *twee* punten D_1 en D_2 bestaan, die met hun toegevoegde punt samenvallen. Men noemt ze de *dubbelpunten* der quadratische involutie. Ook uit vergelijking (1) volgt het onmiddellijk; men stelle slechts $x = y$ waardoor een quadratische vergelijking in de parameter x ontstaat waarvan de beide wortels de twee dubbelpunten der I_2 vertegenwoordigen. Maar de vorm (4) heeft het voordeel dat daaruit eenvoudig is te zien, dat het nieuwe nulpunt M het midden is der beide dubbelpunten D_1 en D_2. Meetkundig laat zich vergelijking (3) nu op de volgende wijze schrijven, wanneer P_1, P_2 een willekeurig paar der I_2 voorstellen

$$\overline{MP_1}.\ \overline{MP_2} = \overline{MD_1}^2 = \overline{MD_2}^2$$

hetgeen eenvoudig wil zeggen dat de punten P_1 en P_2 door de dubbelpunten der involutie *harmonisch* worden gescheiden, welke stelling voor directe omkeering vatbaar is.

Uit (4) is nog af te lezen, dat de dubbelpunten D_1 en D_2

bestaanbaar maar ook onbestaanbaar kunnen zijn; imaginaire dubbelpunten komen in het volgende geval voor. De verwantschapsvergelijking der quadratische involutie had den vorm

$$a x y + b (x + y) + c = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

zij bezit klaarblijkelijk *twee* onafhankelijke coëfficiënten, d. w. z. elke quadratische involutie is door twee paren volkomen bepaald, of anders: wanneer twee paren gegeven zijn, kan men alle andere paren vinden.

Stel nu de paren A_1, A_2 en B_1, B_2 zijn op de drager l gegeven. Richt men nu op $A_1 A_2$ en $B_1 B_2$ als middellijnen twee cirkels op en neemt aan dat zij de snijpunten S en S′ hebben. Wij zien dan dat $S A_1 \perp S A_2$ en $S B_1 \perp S B_2$. Kiest men C_1 willekeurig op l en verbindt C_1 met S, dan staat in S maar één lijn loodrecht op $C_1 S$. Snijdt deze loodlijn de lijn l in het punt C_2, dan geldt $S C_1 \perp S C_2$. Bij elken willekeurigen straal $C_1 S$, wordt slechts één andere gevonden $C_2 S$, en omgekeerd doet $C_2 S$ weder $C_1 S$ terugvinden. Breiden we de bepaling, aan 't hoofd van deze § genoemd, uit tot stralen van eene waaier dan blijkt dat al de rechte hoeken in 't punt S gevormd eene *straleninvolutie* uitmaken van den tweeden graad.

De snijpunten van toegevoegde stralen n.l. de punten A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2 enz. zijn nu vanzelf in een I_2 gerangschikt. Door het punt S of ook door het ten opzichte van l symmetrisch gelegen punt S′ is de I_2 volkomen bepaald. De twee paren A_1, A_2 en B_1, B_2 geven aan waar de punten S en S′ zijn te vinden en hiermee is de stelling dat elke quadratische involutie door twee paren volkomen bepaald wordt, ook meetkundig opgehelderd.

Bij de straleninvolutie (S) is het bestaan van *dubbel*stralen ten eenenmale onmogelijk en de bijbehoorende punteninvolutie op l kan dan ook geen *dubbel*punten vertoonen. Wij hebben hier een geval van *imaginaire* dubbelpunten verwezenlijkt. Men kan ook zeggen de paren der bedoelde involutie worden ingesneden door alle cirkels gaande door

de punten S en S', en de onmogelijkheid van het onstaan van dubbelpunten is weder in te zien.

In geval de paren A_1, A_2 en B_1, B_2 zoo gegeven zijn, dat de segmenten $A_1 A_2$ en $B_1 B_2$ elkaar uitsluiten, zal de besproken constructie falen; we volgen dan een anderen weg.

Ergens in het vlak beschrijven wij een willekeurigen cirkel en nemen daarop, eveneens willekeurig, het punt M_1 aan. De lijnen $M_1 A_1$ en $M_1 A_2$ snijden op den cirkel de punten $X_1 X_2$ in; de lijnen $M_1 B_1$ en $M_1 B_2$ de punten Y_1, Y_2.

Het snijpunt der verbindingslijnen $X_1 X_2$ en $Y_1 Y_2$ noemen we M_2.

Denken wij aan alle stralen door M_2 of van den waaier M_2, dan vormen de op elken straal gelegen snijpunten met den cirkel de paren eener quadratische involutie. De stralenbundel (M_1) geeft op dezelfde wijze een involutie van den tweeden graad. De beide collocale involuties hebben de paren (X_1, X_2) en (Y_1, Y_2) gemeen; zij zijn derhalve identiek, d. w. z. de beide waaiers (M_1) en (M_2) snijden dezelfde involutie op den cirkel in. Of ook de verbindingslijnen van toegevoegde punten eener I_2 op een cirkel gaan door een vast punt. Hier het punt M_2.

Is het punt M_2 uit de twee gegeven paren A_1, A_2 en B_1, B_2 gevonden, dan trekken we een willekeurigen straal door M_2, die de snijpunten $Z_1 Z_2$ oplevert. Projecteer deze uit M_1, dan wijzen de lijnen $M_1 Z_1$ en $M_1 Z_2$ op de lijn l het paar (C_1, C_2) der involutie aan, waartoe ook A_1, A_2 en B_1, B_2 behooren. Uit M_2 gaan nu of twee reëele of twee imaginaire raaklijnen aan den cirkel.

In het eerste geval zullen de beide raakpunten R_1 en R_2 de dubbelpunten voorstellen der involutie (X, Y), en zij zullen uit M_1 geprojecteerd noodwendig de beide bestaanbare dubbelpunten der op l gelegen involutie (A B.) aanwijzen.

Ging de eerste constructie slechts in één geval door, de laatst besprokene is in *beide* gevallen te gebruiken.

Toepassingen:

1. Een bundel kegelsneden bepaalt op een recht l een I_2.

Lettende op de drie ontaardingen zien wij de bekende *stelling* van DESARGUES dat de overstaande zijden van een volledigen vierhoek op een rechte drie paren eener zelfde involutie insnijden.

2. Elke I_2 bezit twee dubbelpunten. Door vier punten gaan derhalven steeds twee kegelsneden die een gegeven rechte aanraken.
3. Ligt de gegeven rechte in het oneindige dan blijkt dat er door vier willekeurige punten steeds twee parabolen gaan.

---

§ 3. DE INVOLUTIE VAN DEN P^EN GRAAD OP EEN RECHTE.

Bepaling. «Hebben wij een stelsel van puntengroepen $P_1 \ldots\ldots P_p$, zoodat elke groep door één harer punten, onverschillig welk volkomen bepaald is, dan noemen wij zoo'n puntenstelsel eene involutie van den p^{en} graad of eene Ip.»

Een bundel krommen van den p^{en} graad zal op een rechte *l* zoo'n Ip bepalen.

Algebraïsch kan men de involutie van den p^{en} graad, op de lijn *l* als drager gelegen, voorstellen door de vergelijking

$$a_x^p + \lambda b_x^p = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

waarin a_x^p en b_x^p functies van den p^{en} graad in x zijn. De coördinaat x is te rekenen van af zeker nulpunt op den drager l en λ is een parameter. Zoodra men aan λ een bepaalde waarde toekent, levert de vergelijking (1) voor de veranderlijke x blijkbaar p waarden. Elke waarde van λ geeft een groep van p punten aan.

Is omgekeerd een punt P_1 door de abscis x_1 gegeven dan wordt door de substitutie dezer abscis in de vergelijking (1) de parameter λ gevonden en zijn de p wortels van vergelijking (1) bepaald. Hieruit is te zien dat door één punt P_1 steeds een groep van p punten bepaald wordt waartoe ook dat punt P_1 zelf behoort, terwijl het weder onverschillig is van welk punt der groep men uitgaat.

De mogelijkheid bestaat dat de vergelijking (1) voor een bepaalde waarde van λ twee gelijke wortels bezit. In zoo'n geval is hare afgeleide nul. Eliminatie van λ tusschen vergelijking (1) en hare afgeleide zal eene vergelijking van den graad $2\ (p-1)$ in x doen ontstaan d. w. z. «Elke involutie van den p^{en} graad bezit $2\ (p-1)$ dubbelpunten».

Neemt men op den drager der I_p twee nulpunten aan, dan kan men de plaats van een punt bepalen door de verhouding der afstanden tot die twee nulpunten en met homogeene coördinaten werken.

Dan is de I_p algebraisch voor te stellen door de vergelijking

$$u^p\,(x_1\,x_2) + \lambda\, v^p\,(x_1\,x_2) = 0.$$

De functies u en v zijn nu van den p^{en} graad in x_1 en x_2. Voor dubbelpunten der I_p moet nu gelden:

$$\frac{d\,u}{d\,x_1} + \lambda\,\frac{d\,v}{d\,x_1} = 0 \qquad \frac{d\,u}{d\,x_2} + \lambda\,\frac{d\,v}{d\,x_2} = 0.$$

Eliminatie van λ levert

$$\frac{d\,u}{d\,x_1}.\ \frac{d\,v}{d\,x_2} = \frac{d\,v}{d\,x_2}.\ \frac{d\,v}{d\,x_1}$$

Deze functionaal determinant is van den graad $2\ (p-1)$, waaruit het bovengenoemden resultaat weder blijkt.

Op soortgelijke wijze is te onderzoeken of de I_p drie- of meervoudige elementen bezit. Maar in 't algemeen zijn die er niet.

Is er een p-voudig element en nemen wij dit tot nulpunt van telling, dan is de I_p voor te stellen door

$$x^p + \lambda\,\phi\,(x) = 0.$$

$\phi\,(x) =$ functie van den p^{en} graad in x.

Voor dubbelpunten is

$$p\,x^{p-1} + \lambda\,\phi'\,(x) = 0.$$

Eliminatie van λ geeft de vergelijking:

$$x^p\,\phi'\,(x) - p\,x^{p-1}\,\phi\,(x) = 0.$$

Zij heeft (p — 1) wortels de nul zijn d. w. z. «Elk p-voudig punt vervangt (p — 1) dubbelpunten». Ergens anders liggen er nog (p — 1).

Uit den vorm der vergelijking

$$a_x^p + \lambda\, b_x^p = 0$$

is weder te zien dat de I_p door twee groepen volkomen bepaald is; want dan zijn de functies a_x^p en b_x^p bekend, waarmee de vergelijking der I_p kan samengesteld worden.

---

§ 4. De involutie van den p^en^ graad op eene kegelsnede.

De I_p die wij tot nu toe op een rechte hebben beschouwd, laat zich onmiddellijk op elke rationale vlakke kromme overbrengen.

In de eerste plaats op eene kegelsnede. Nemen we op een gegeven kegelsnede een willekeurig punt en projecteeren wij uit dat punt de I_p, die op een rechte in hetzelfde vlak is gelegen, dan snijdt de projecteerende stralenbundel op de kegelsnede eene puntenreeks in, welke ook eene I_p is, wegens de overeenkomst één aan één tusschen de punten der beide reeksen.

We spreken nu over de I_p op de kegelsnede ontstaan.

Worden de toegevoegde punten door rechte lijnen twee aan twee verbonden, dan is de vraag: wat is de omhullende van al deze verbindingslijnen?

De *klasse* laat zich makkelijk bepalen. Immers door 'n willekeurig punt P_1 van de kegelsnede C_2 kunnen niet meer dan (p — 1) raaklijnen der omhullende gaan; nl. alleen die welke het bedoelde punt P_1 met de (p — 1) punten $P_2, \ldots P_p$ verbinden die door de involutie aan het punt P_1 zijn toegevoegd.

De *klasse* der omhullende of der zoogenaamde *involutiekromme* is derhalve (p — 1).

Voor $p = 2$ is de involutiekromme een *enkel punt.* Wij

zagen dan ook vroeger dat de verbindingslijnen van toegevoegde punten eener I_2 op een cirkel door één punt gingen.

Bestaan op een kegelsnede twee involuties, bijv. eene I_p en eene I_q, dan hebben zij involutiekrommen waarvan de klasse achtereenvolgens is $(p - 1)$ en $(q - 1)$.

De beide omhullenden zullen blijkbaar $(p - 1)(q - 1)$ gemeenschappelijke raaklijnen bezitten. Zoo'n raaklijn ontstaat, wanneer de twee collocale involuties een paar gemeen hebben, zoodat twee collocale involuties I_p en I_q steeds $(p - 1)(q - 1)$ paren gemeenschappelijk hebben.

De involutiekromme der I_p en de drager C_2 hebben $2(p - 1)$ gemeenschappelijke raaklijnen. Wat beteekenen die voor de I_p? Het zijn eenvoudig de $2(p - 1)$ raaklijnen die men in de dubbelpunten der I_p aan de kegelsnede kan trekken.

Onder *vertakkingspunt* verstaat men een punt waarvoor twee toegevoegde punten samenvallen. Zoo zal een groep van p toegevoegde punten waaronder een dubbelpunt $P_1 \equiv P_2$, $(p - 2)$ vertakkingspunten bezitten $P_3 \ldots . P_p$. Aan elk der punten $P_3 \ldots . P_p$ is immers het dubbelpunt $P_1 \equiv P_2$ toegevoegd.

De $2(p - 1)$ dubbelpunten der I_p doen dus $2(p - 1)(p - 2)$ vertakkingspunten ontstaan.

Uit een vertakkingspunt P_3 gaan naar het bijbehoorende dubbelpunt $P_1 \equiv P_2$ de twee raaklijnen $P_1 P_3$ en $P_2 P_3$, die samenvallen, d. w. z. elk *vertakkingspunt* is *op* de involutiekromme gelegen. Zoo liggen er $2(p - 1)(p - 2)$ punten der omhullende op de kegelsnede, m. a. w. de *graad* der involutiekromme is

$$(p - 1)(p - 2).$$

Dubbelraaklijnen kan de involutiekromme niet bezitten; daarvoor moesten in één groep minstens twee dubbelpunten voorkomen en dat is in het algemeen niet het geval.

Nu is volgens een der formules van *Plücker*

$$n = k(k - 1) - 2\tau - 3\beta.$$

Voor de involutiekromme is gevonden

$$\begin{cases} n = (p - 1)(p - 2) \\ k = p - 1 \\ \tau = 0 \end{cases} \quad \text{Bijgevolg ook } \beta = 0.$$

De onmogelijkheid van buigpunten blijkt bovendien meetkundig.

Voor het *geslacht* der omhullende is makkelijk te vinden

$$g = \frac{1}{2}(p - 2)(p - 3).$$

We zien uit het bovenstaande dat eerst een *cubische* involutie een eigenlijke involutiekromme bezit en wel een *involutiekegelsnede.*

De I_3 op de kegelsnede C_2 is door de twee drietallen A_1, A_2, A_3 en B_1, B_2, B_3 volkomen bepaald, en de zes verbindingslijnen dezer beide drietallen raken nu aan een tweede kegelsnede k_2. Gieten we dit resultaat in een bekenden vorm dan krijgen we:

«Zijn twee driehoeken beschreven in zekere kegelsnede dan raken hunne zes zijden aan een nieuwe kegelsnede».

Wij zien, dat er een heel stelsel van driehoeken bestaat die aan dezelfde voorwaarde voldoen.

In 't algemeen is de omhullende der I_p niet rationaal. Het geslacht kan verminderen, wanneer in één groep der involutie meer dan één dubbelpunt aanwezig is. Dan wordt het geslacht der involutiekromme voor elk meerder dubbelpunt met één verlaagd.

Een groep der I_p bepaalt $\frac{1}{2} p (p - 1)$ raaklijnen aan de omhullende die door $\frac{1}{2} (p - 1)(p + 2)$ raaklijnen bepaald is, zooals volgt uit hare klasse. En zoo zien we licht in dat de omhullende der verbindingslijnen van toegevoegde paren, o. a. door één volledige groep der I_p en $(p - 1)$ geheel willekeurige puntenparen bepaald is, terwijl dan ook de involutie zelf bepaald zal zijn.

---

§ 5. Constructies.

Zoodra op een kegelsnede twee paren A_1, A_2 en B_1, B_2 gegeven zijn, is een I_2 bepaald, d. w. z. dat we dan alle paren kunnen vinden. Zoek slechts het snijpunt *M* der lijnen A_1, A_2 en B_1, B_2. Iedere willekeurige lijn door *M* zal dan een ander paar der involutie bevatten. Dit punt M is niets anders dan het reeds besprokene klassepunt der ontaarde involutiekromme.

De cubische involutie is door twee drietallen (A) en (B) bepaald. Hoe vinden we dan de overige drietallen?

Daartoe nemen we op de kegelsnede het punt P willekeurig aan. De twee ontaarde kegelsneden ($P A_1$, $A_2 A_3$) en ($P B_1$, $B_2 B_3$) bepalen de vier grondpunten P, Q, R, S van een bundel. Omdat nu één der basispunten nl. het punt P òp de kegelsnede is gelegen, zullen de exemplaren van den bundel eene I_3 voortbrengen op de kegelsnede van uitgang. De ontaarde kegelsnede (Q S, P R) levert een 3e groep (C.)

Is nu op de kegelsnede eene cubische involutie gegeven door de beide groepen (A) en (B) dan is het mogelijk het drietal te bepalen waarvan één punt C_3 vooruit aangewezen is.

De lijnen $A_2 A_3$ en $B_2 B_3$ bepalen het punt *S*. Trek nu $C_3 S$ dan snijdt deze lijn het punt *P* in. De rechte $Q A_1$ en $P B_1$ geven nu op $B_2 B_3$ en $A_2 A_3$ de plaats der basispunten Q en R aan. Trek nog Q R en men vindt de punten C_1 en C_2 die met het vooraf bepaalde punt C_3 ééne groep vormen. Geef C_3 telkens anderen standen, dan zijn op deze wijs alle groepen der I_3 te verkrijgen.

Men kan ook uit deze constructie zien dat de I_3 door één drietal (A) en twee paren B_2, B_3 en C_1, C_2 volkomen bepaald is. Immers deze bepalen het punt Q. De lijn $A_1 Q$ geeft 't punt P. Het punt *S* wordt gevonden als het snijpunt van $A_2 A_3$ en $B_2 B_3$, terwijl $A_2 A_3$ door $C_1 C_2$ in het vierde basispunt R wordt gesneden, waardoor de bundel weder bekend is.

Voor de *biquadratische involutie* geldt ongeveer dezelfde

constructie. Stel gegeven de viertallen (A) en (B) van een I_4 op een kegelsnede.

De ontaardingen ($A_1 A_2$, $A_3 A_4$) en ($B_1 B_2$, $B_3 B_4$) leveren vier snijpunten, die een bundel kegelsneden bepalen. De derde ontaarding levert een derde viertal (C). Door herhaalde toepassing dezer constructie vinden wij zooveel groepen als wij willen.

---

§ 6. Duale beschouwingen over involuties op een kegelsnede.

In het platte vlak zijn punt en rechte duale begrippen.

Zoo kan een stralenbundel, die uit 'n punt M een op een rechte gelegen quadratische involutie projecteert, als de duale omzetting dier I_2 worden beschouwd. De stralenbundel met M als middelpunt is dan eene quadratische straleninvolutie. Zij zal twee dubbelstralen bezitten.

Bestaat op een rechte een I_p dan kunnen wij op dezelfde manier, door projectie uit een willekeurig centrum *M*, een straleninvolutie van den p^{en} graad verkrijgen, waarin nu 2 (p—1) dubbelstralen aanwezig zijn.

Hebben wij een schaar van kegelsneden d. w. z. alle kegelsneden die aan vier vaste rechten raken, en trekken wij uit een willekeurig punt *M* de raaklijnen aan de exemplaren van de schaar, dan vormen die raaklijnen eene I_2.

In de schaar komen drie ontaardingen voor n.l. de drie paar overstaande hoekpunten van de volledige vierzijde gevormd door de vier vaste rechten. Wij vinden hieruit de duale stelling van Desargues dat n.l. de drie paar overstaande hoekpunten van een volledige vierzijde, uit een willekeurig punt door drie paren eener zelfde straleninvolutie geprojecteerd worden.

Trekken wij in elk punt van een punteninvolutie I_2, die geplaatst is op een kegelsnede, de raaklijn dan worden de raaklijnen der kegelsnede in de paren eener I_2 gerangschikt. Dat de meetkundige plaats der snijpunten van toegevoegde stralen in dit geval eene rechte lijn *m* is, volgt hieruit dat

op elke raaklijn slechts één punt dier meetkundige plaats is gelegen. Zijn van zoo'n straleninvolutie twee paren bekend, dan wordt door hunnen beide snijpunten de stand der lijn *m* gevonden. Elke twee raaklijnen uit een punt van *m* vormen nu een paar der involutie. De dubbelstralen zijn de raaklijnen in de snijpunten van *m* met de kegelsnede.

Op dezelfde wijze kunnen wij ons de raaklijnen aan een C_2 gerangschikt denken in de groepen eener I_3. De meetkundige plaats der snijpunten van toegevoegde raaklijnen of de zoogenaamde involutiekromme zal nu een kegelsnede zijn. Immers elke raaklijn wordt door twee toegevoegde gesneden. Wij krijgen zoo een stelsel driehoeken om de kegelsneden van uitgang beschreven, waarvan de hoekpunten liggen op een nieuwe kegelsnede.

Wanneer nu in 't algemeen de raaklijnen aan een kegelsnede eene I_p vormen, zal de involutiekromme Γ van den *graad* $(p-1)$ zijn. Bevindt zich nog eene involutie I_q op de kegelsnede dan heeft die eene involutiekromme Γ' van den *graad* $(q-1)$. De beide involutiekrommen hebben $(p-1)$ $(q-1)$ snijpunten m. a. w. de collocale raaklijneninvoluties I_p en I_q hebben $(p-1)$ $(q-1)$ gemeenschappelijke paren.

De kegelsnede en Γ hebben $2\,(p-1)$ snijpunten ontstaande uit de raakpunten der $2\,(p-1)$ dubbelstralen. Elke dubbelstraal wordt door $(p-2)$ toegevoegde stralen gesneden, welke raaklijnen aan Γ zijn en tegelijk aan de kegelsnede. De kegelsnede en Γ hebben dus $2\,(p-1)\,(p-2)$ gemeenschappelijke raaklijnen. Het blijkt hieruit dat de *klasse* van Γ moet zijn $(p-1)\,(p-2)$.

Dubbelpunten zal Γ niet hebben.

Bovendien volgt uit $k = n\,(n-1) - 2\,\delta - 3\,\varkappa$, waarin $\delta = 0$ dat ook $\varkappa = 0$.

Voor het geslacht van Γ geldt

$$g = {}^1\!/_2\,(n-1)\,(n-2) - \delta - \varkappa \quad \text{of}$$
$$g = {}^1\!/_2\,(p-2)\,(p-3)$$

Het geslacht der involutiekromme is hetzelfde voor de punteninvolutie als voor de raaklijneninvolutie.

Is ook duidelijk, want het geslacht is duaal in zich zelf.

Een volledige groep raaklijnen eener I_p geeft $1/2$ p (p—1) punten van de involutiekromme. Deze laatste is van den graad (p—1) en zal derhalve door één volledige en (p—1) willekeurige raaklijnenparen bepaald zijn.

Twee groepen van *p* raaklijnen bepalen de involutiekromme Γ, omdat zij de I_p bepalen. In elke groep zijn $1/2$ p (p—1) punten van Γ gelegen, en in 't geheel zijn door twee groepen p (p—1) punten bepaald. Doch Γ is van den graad (p—1) en daarom door $1/2$ (p—1) (p + 2) punten bepaald.

Eisch nu

$$p\,(p-1) > 1/2\,(p-1)\,(p+2)$$

of

$$p^2 - 3\,p > -2$$

dan volgt dat zoodra $p > 2$ twee volledige groepen van raaklijnen meer punten der involutiekrommen geven dan voor haren bepaling noodig zijn.

Zoo is bij een raaklijnen I_4 de involutie krommen Γ van den *derden* graad. Twee groepen raaklijnen leveren 12 punten van Γ, die reeds door 9 punten bepaald is. En zoo zien wij dat de 12 hoekpunten van twee volledige vierzijden gevormd door raaklijnen aan één kegelsnede op een $\dot{K}_3$ liggen.

Bovendien blijkt dat een I_4 van raaklijnen aan een kegelsnede door drie drietallen is te bepalen. Want zij leveren ons 9 punten der involutiekromme, die daarmee bepaald is. De I_4 is dan ook bepaald.

---

§ 7. De I_p op een willekeurige rationale vlakke kromme.

Behalve op eene kegelsnede kunnen wij de I_p van een rechte overbrengen op iedere rationale kromme. Immers iedere kromme van het geslacht nul kan vertegenwoordigd worden door een puntenreeks op een rechte. Neem bijv. een cubische kromme met een dubbelpunt D dan zal de

stralenbundel met D als centrum de C_3 punt voor punt projecteeren op een willekeurige rechte.

Omgekeerd is nu de involutie I_p van een rechte over te brengen op de kromme C_3 door middel van den waaier D.

Zoo ook bij een C_4 met drievoudig punt.

Maar in 't algemeen zullen wij de C_n van geslacht nul moeten projecteeren door een bundel C_{n-2} gaande door de $1/2$ $(n - 1)$ $(n - 2)$ dubbelpunten der C_n en nog $(n - 3)$ willekeurige punten.

Ieder exemplaar van den bundel heeft nu één veranderlijk snijpunt met de C_n. Door de raaklijnen aan de exemplaren van den bundel te trekken in één der basispunten, wordt de bundel vervangen door een waaier.

De snijpunten van dezen waaier met een willekeurige rechte stemmen nu een aan een overeen met de punten der C_n.

Met het bepalen van de involutiekromme Γ der I_p op een rationale C_n geplaatst, zal het niet zoo eenvoudig gaan, als toen de kegelsnede draagster was.

Bij een I_2, die zich op een C_3 met een dubbelpunt D bevindt, is terstond op te merken, dat bij het punt D twee toegevoegde punten behooren; dat dus uit D twee raaklijnen aan de involutiekromme gaan, die dan een kegelsnede is.

Is op diezelfde C_3 eene I_3 aanwezig, dan worden aan het dubbelpunt D vier punten toegevoegd en wordt de *klasse* der omhullende vier.

Maar wanneer de C_n algemeenen wordt is van te voren over Γ niets te zeggen, wat *graad* of *klasse* aangaat. Alleen het *geslacht* zal hetzelfde zijn als we vroeger vonden, toen de I_p op een kegelsnede werd beschouwd.

Stel toch de I_p gegeven op een rationale C_n. Beeld de C_n met de I_p er op, af op een kegelsnede. We zien dan op die kegelsnede eene involutie J_p ontstaan. Met de lijn $P_1 P_2$ die twee toegevoegde punten der I_p verbindt, zal nu overeenkomen de lijnen $P' \; P''$ die de overeenkomstige punten van de involutie J_p bevat.

De raaklijnen der omhullende Γ van I_p stemmen een aan een overeen met die der omhullende van J_p. De involutie-

kromme Γ van de involutie I_p heeft in dit geval het zelfde geslacht als de omhullende der involutie J_p op de kegelsnede.

Voor het geslacht van Γ geldt dus evenals vroeger

$$g = \frac{1}{2} (p - 2) (p - 3).$$

Tevens zal men licht inzien dat het aantal dubbelpunten der I_p ook geene verandering kan ondergaan en $2 (p - 1)$ blijft.

HOOFDSTUK II.

§ 1. De algebraïsche verwantschap.

De verdere behandeling der involuties vereischt de kennis der verwantschapstheorie. Wij willen haar in dit hoofdstuk ontwikkelen.

Denken wij ons twee rechten en op elk een nulpunt, dan laten de punten van de éene lijn zich door de abscis x en die van de andere zich door de abscis y aanwijzen. Beschouwen we nu de vergelijking

$$A\,y^n + B\,y^{n-1} + \ldots\ldots + R\,y + T = 0 \quad \ldots \quad (1)$$

waarin

$$\left\{\begin{array}{l} A = a_{m,n}\,x^m + a_{m-1,n}\,x^{m-1} + \ldots\ldots + a_{o,n} \\ B = a_{m,n-1}\,x^m + a_{m-1,n-1}\,x^{m-1} + \ldots\ldots + a_{o,n-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ T = a_{m,o}\,x^m + a_{m-1,o}\,x^{m-1} + \ldots\ldots + a_{o,o}. \end{array}\right.$$

Deze vergelijking is van den graad n in y, terwijl de coëfficiënten functies van x zijn van den graad m.

Nemen we een punt X op de éene lijn en substitueeren we de bijbehoorende abscis x in de vergelijking (1), zoo zien we dat al de coëfficiënten A, B, . . . T bekend worden en dat wij voor de onbekende y uit die vergelijking n waarden kunnen berekenen.

Wordt dus op de éene lijn één punt X willekeurig aangenomen, dan zijn daardoor n punten Y bepaald.

Maar bij het willekeurig aangenomen punt Y zijn op dezelfde manier m punten X te vinden.

De genoemde vergelijking legt een verband tusschen de punten X van een bepaalde rechte en de punten Y van een

andere rechte en wel zoodanig dat met één punt X overeenkomen *n* punten Y, en met één punt Y overeenkomen *m* punten X. Men zegt nu, dat tusschen de punten X en Y een *verwantschap* (m, n) bestaat, of ook dat de puntenstelsels (X) en (Y) in m—n— ledig verband staan. Ieder stelsel op zichzelf heet, wanneer het op een rechte of in 't algemeen op 'n rationalen drager wordt gevonden, een *rationaal elementenstelsel.*

Laten we de beide rechten, waarop we de stelsels (X) en en (Y) dachten, in één vlak vallen, dan is licht te begrijpen dat zij tegelijkertijd op een kegelsnede kunnen voorkomen. Daartoe kiezen we slechts een willekeurig punt M op een in het bedoelde vlak gelegen kegelsnede C_2. Projecteer uit M de beide stelsels (X) en (Y), en de punten der C_2 worden gerangschikt in dezelfde verwantschap (m, n).

De beide rechten waarop we de puntenstelsels (X) en (Y) dachten, mogen we ook laten samenvallen. Maar dan hebben we aan één nulpunt genoeg. De veranderlijken x en y uit vergelijking (1) stellen in dit geval afstanden tot *hetzelfde* nulpunt voor, vandaar de mogelijkheid dat zij aan elkaar gelijk worden, en een punt X met *zichzelf* overeenkomt. Het is een punt $X \equiv Y$ dat tot beide stelsels behoort. Men noemt zoo'n punt gemeenschappelijk aan beide puntenstelsels een *coïncidentie.*

Hun aantal is gemakkelijk te vinden. Schrijven we de verwantschapsvergelijking verkort

$$f(x, y) = 0$$

dan vinden wij de bedoelde punten door $x = y$ te stellen in die vergelijking, waardoor ze in x of in y van den graad $(m + n)$ wordt; m. a. w. «elke verwantschap (m, n) bezit $(m + n)$ coïncidenties».

Met één punt X komen *n* punten Y overeen. Vallen twee van deze *n* punten Y samen dan spreekt men van een *dubbelpunt.* Het punt X waarvoor twee bijbehoorende punten Y zijn samengevallen heet een *vertakkingspunt.*

Algebraïsch is hun aantal te vinden door te vragen, hoeveel gelijke wortels y, heeft de vergelijking $f(x, y) = 0$ bij een bepaalde waarde van x?

Men elimineere y uit $f(x, y) = 0$ en uit hare afgeleide naar *y*, en zal een vorm verkrijgen in *x* van den graad $2m(n-1)$, hetgeen beteekent dat het stelsel X $2m(n-1)$ vertakkingselementen bezit of dat het stelsel Y $2m(n-1)$ dubbelpunten vertoont.

Men verkrijgt dit resultaat ook als volgt. Willen we berekenen het aantal dubbelpunten van het stelsel X, dan zoeken we het verband dat er tusschen die punten X onderling bestaat. Met één punt X komen overeen *n* punten Y, en met ieder dier punten Y nog $(m-1)$ andere punten X. Tusschen de punten X onderling bestaat dus eene verwantschap met symbool

$$[n(m-1),\ n(m-1)]$$

Zij bezit $2n(m-1)$ coïncidenties d. w. z. het stelsel X bezit $2n(m-1)$ dubbelpunten en het stelsel Y evenveel vertakkingspunten.

Denken we nog steeds dat de stelsels (X) en (Y) op de zelfde rechte als drager voorkomen met het zelfde nulpunt, dan is het mogelijk dat bij een zeker punt X behoort een ander punt Y en dat hetzelfde punt X als een punt Y beschouwd het eerste punt Y oplevert, dat dan nu een punt X moet heeten. Men kan immers elk punt A als een punt X en als een punt Y beschouwen.

Bij zoo'n punt A behooren in 't algemeen twee verschillende punten; n.l. bij de opvatting $A \equiv X$ het punt Y' en bij de beschouwing $A \equiv Y$ het punt X'. Is nu $X' \equiv Y'$ dan heeft men een zoogenaamd *involutorisch* paar $(X \equiv Y, X' \equiv Y')$.

Het snelst vindt men het aantal involutorische paren langs den algebraïschen weg uit de verwantschapsvergelijking:

$$f(x, y) = 0.$$

We moeten de wortelparen hebben die bij verwisseling

der waarde van x en y blijven voldoen, dat zijn de waarden die voldoen aan

$$f(x, y) = 0 \text{ èn aan } f(y, x) = 0.$$

Beschouw deze vergelijkingen als voorstellende twee algebraïsche krommen van den graad $(m + n)$; die hebben $(m + n)^2$ snijpunten. Alle wortels der vergelijking $f(x, x)$ hooren er ook onder. Dat zijn er $(m + n)$.

Zij geven volgens vroeger de coïncidenties aan. De substitutie $x = 0$ geeft slechts n waarden y. Derhalve liggen m punten in 't oneindige op de Y-as, voor de eene kromme en n punten op de Y-as in 't oneindige voor de andere kromme. Op de Y-as vinden we daardoor $m\,n$ snijpunten. Op de X-as evenzoo. We houden nu over

$$(m + n)^2 - (m + n) - 2\,m\,n = m\,(m - 1) + n\,(n - 1)$$

voor het aantal snijpunten dat wij bedoelen. Het aantal *involutorische paren* is nu de helft daarvan dus

$$\tfrac{1}{2}\,\{m\,(m - 1) + n\,(n - 1)\}$$

daar elk wortelpaar verwisselbaar is.

§ 2. Willen we het laatste resultaat langs anderen weg afleiden dan zouden we de verwantschap (m, n) tusschen de punten eener kegelsnede kunnen bestudeeren. We zagen reeds hoe zoo'n verwantschap op een kegelsnede ontstaan kan, en noemen de oneindig vele punten der kegelsnede wanneer ze in het éene stelsel gedacht worden X, in het andere Y. We zullen het dus hebben over de verwantschap (X, Y) op eene kegelsnede. Het symbool dier betrekking is (m, n). Evenals bij de I_p op een kegelsnede is ook hier te spreken van eene *directiekromme*, of omhullende van verbindingslijnen van toegevoegde punten; deze is uiterst belangrijk.

Bij een willekeurig punt $A \equiv X$ [d. w. z. het punt A in het stelsel (X) gedacht] behooren n punten Y, terwijl bij dat zelfde punt $A \equiv Y$ behooren m punten X, zoodat in 't geheel aan elk willekeurig punt der kegelsnede $(m + n)$ punten toegevoegd zijn, of anders door elk willekeurig punt der

kegelsnede gaan $(m+n)$ *raaklijnen* aan de directiekromme Γ.
De *klasse* van Γ is bijgevolg $(m+n)$

Zoodra we er in slagen het aantal snijpunten van Γ met de kegelsnede te bepalen, is de *graad* van de omhullende Γ bekend.

Stellen we ons even zoo'n snijpunt P voor, dan is het duidelijk dat uit dat punt P twee samengevallen raaklijnen aan de directiekromme moeten gaan, want P zal immers òp die directiekromme liggen.

Het punt P is een vertakkingspunt wanneer van de toegevoegde punten er *twee* samenvallen bijv. $P' \equiv P''$. Maar dan vallen de raaklijnen PP' en PP'', die uit P vertrekken aan Γ, ook samen, wat met zich meebrengt dat zoo'n punt P òp Γ ligt. Derhalve liggen *alle* vertakkingspunten der (m, n) op Γ. Dat zijn er uit de beide stelsels (X) en (Y) samen $2m(n-1) + 2n(m-1)$.

Ze liggen vanzelf op de kegelsnede en wij zien dat de directiekromme Γ en de kegelsnede bezitten $2m(n-1) + 2n(m-1)$ snijpunten.

Dit zijn nog niet alle snijpunten. Het is denkbaar dat een punt X samenvalt met een der toegevoegde punten Y. Buiten het bedoelde punt $X \equiv Y$ liggen dan $(m-1)$ punten X en $(n-1)$ punten Y. Men kan daarom uit dat punt $(m+n-2)$ raaklijnen aan Γ trekken. We vonden echter voor de klasse van Γ het getal $(m+n)$, zoodat blijkt dat de lijn die de samengevallen punten X en Y verbindt voor *twee* raaklijnen geldt. Die lijn is tevens raaklijn aan de kegelsnede in het punt $X \equiv Y$. Het blijkt ons hieruit dat de kegelsnede en Γ elkaar in zoo'n punt $X \equiv Y$ aanraken. We hadden intusschen ook evengoed over een *coïncidentie* $X \equiv Y$ kunnen spreken. Want dan hebben we zoo'n punt X dat met één der toegevoegde punten Y samenvalt. De directiekromme Γ en de kegelsnede hebben dan ook evenveel *aanrakingspunten* als er coïncidenties der (m, n) bestaan, dus $(m+n)$. Zij vertegenwoordigen natuurlijk dubbel zooveel snijpunten. Het totale aantal snijpunten tusschen de

directiekromme Γ en de kegelsnede is nu $2m(n-1)+2n(m-1)+2(m+n)=4mn$. De *orde* van Γ is alzoo $=2mn$.

De omhullende Γ zal bovendien een aantal *dubbelraaklijnen* bezitten.

Hun aantal zullen we berekenen uit het aantal *involutorische* paren der (m, n), waar het ons eigenlijk om te doen was.

Herinneren we ons weder de oneindig vele punten der kegelsnede, vertegenwoordigende twee puntenstelsels (X) en (Y) in m — n-ledig verband en projecteeren wij ze uit twee geheel willekeurige centra A en B, door de stralenbundels (x) en (y). Dat er nu tusschen die waaiers (x) en (y) ook eene (m, n) bestaat, spreekt vanzelf, en door dualistische omzetting van het voorafgaande volgt dat de meetkundige plaats der snijpunten S van toegevoegde stralen de *graad* $(m+n)$ moet hebben. Trouwens, men ziet het evengoed rechtstreeks. De beide stralenbundels (x) en (y) teekenen op een willekeurige rechte een puntenstelsel of met symbool (m, n), of met $(m+n)$ coïncidenties. En dat zijn alle punten S, hetgeen beteekent dat de *graad* der meetkundige plaats van S is $(m+n)$.

Gemakkelijk zien we ook in dat de meetkundige plaats van S in het centrum A een *m*-voudig en in centrum B een *n*-voudig punt zal hebben.

Projecteeren we nu op de ander mogelijke manier, d. w. z. het stelsel (X) uit B en het stelsel (Y) uit A, door de stralenbundels (x′) en (y′) dan ontstaat een andere meetkundige plaats van punten S′ die weer een kromme van den *graad* $(m+n)$ is, maar nu met een *n*-voudig punt in *A* en een *m*-voudig punt in *B*.

De krommen (S) en (S′) hebben in 't algemeen $(m+n)^2$ snijpunten. Hoe zijn die te verantwoorden? Terstond zien wij er nm in het centrum A en evenveel in centrum B. Buiten A en B, d. w. z. ergens anders, dus nog (m^2+n^2) snijpunten.

Denken we ons eens zoo'n snijpunt $S \equiv S'$. De eenvoudigste voorstelling van het ontstaan van zoo'n punt $S \equiv S'$ is dan dat het stralenpaar x, y met het stralenpaar x′, y′

samenvalt, d. w. z. $x \equiv x'$ en $y \equiv y'$. Dan moet vanzelf $S \equiv S'$. Doch $x \equiv x'$ en $y \equiv y'$ is onmogelijk zooals een figuur ons doet zien. Is dan $x \equiv y'$ en $y \equiv x'$ mogelijk? Zeer goed. We hoeven slechts te letten op een coincidentie $X \equiv Y$. Projecteeren zoo'n punt $X \equiv Y$ uit A dan blijkt $x \equiv y'$; projectie uit B geeft evenzoo $x' \equiv y$. Er zijn $(m + n)$ coincidenties, waardoor $(m + n)$ snijpunten $S \equiv S'$ gevonden zijn. Nu schieten er nog $m(m - 1) + n(n - 1$ over.

Om deze te verklaren gaan wij den invloed van een *involutorisch* paar na.

Zij $X \equiv \bar{Y}$ en $\bar{X}' \equiv Y'$ zoo'n puntenpaar. Wat gebeurt er nu bij projectie uit A en B, alsook andersom? Dan wordt

$$AX \equiv A\bar{Y} \equiv x \equiv \bar{y}' \qquad AY' \equiv A\bar{X}' \equiv y' \equiv \bar{x}$$

$$BY' \equiv B\bar{X}' \equiv \bar{x}' \equiv y \qquad BX \equiv B\bar{Y} \equiv x' \equiv \bar{y}$$

waaruit volgt dat het snijpunt $(x, y) \equiv (x', y')$ en het snijpunt $(\bar{x}, \bar{y}) \equiv (\bar{x}', \bar{y}')$ beide één punt S leveren.

Een involutorisch paar geeft derhalve tot twee punten S aanleiding, waaruit we dan ten slotte zien, dat het overschietende aantal snijpunten nl. $m(m - 1) + n(n - 1)$ kan verklaard worden door de aanwezigheid van $\frac{1}{2}m(m - 1) + \frac{1}{2}n(n - 1)$ involutorische paren.

De twee samenvallende verbindingslijnen der punten $X \equiv \bar{Y}$ en $\bar{X}' \equiv Y'$ vormen blijkbaar een *dubbelraaklijn* van Γ.

De directiekrommen Γ der verwantschap (m, n) is nu van *klasse* $(m + n)$, van *graad* $2mn$, en bezit $\frac{1}{2}\{m(m - 1) + n(n - 1)\}$ dubbelraaklijnen.

De duale beschouwing gehouden over eene (m, n) tusschen raaklijnen aan eene kegelsnede kan nu opleveren eene *directiekromme* (dat is de meetkundige plaats van snijpunten van toegevoegde raaklijnen) waarvan de *graad* $(m + n)$ en de *klasse* $2mn$ is, voorzien van

$\frac{1}{2}\{m(m - 1) + n(n - 1)\}$ *dubbelpunten.*

§ 3. De involutorische of symmetrische verwantschap.

De algemeene vergelijking der (m, n) was

$$f(x, y) = 0$$

in x van den m^{en} in y van den n^{en} graad. Zij bezit $\frac{1}{2} \{ m(m-1) + n(n-1) \}$ involutorische paren. In het geval dat $m = n$, zijn er $m(m-1)$ involutorische paren. Vinden we er meer, dan beteekent dat, dat de krommen (S) en (S′) der voorgaande paragraaf die nu van den graad $2m$ worden, meer dan $4m^2$ snijpunten bezitten, m. a. w. dat de krommen (S) en (S′) samenvallen. Elk punt S is dus ook een punt S′. Daarvoor moeten *alle* paren der verwantschap (X, Y) *involutorische* zijn, vandaar dat men spreekt van eene *involutorische* verwantschap. Ze heet ook wel eene *symmetrische* verwantschap. Want zoodra de vergelijking $f(x, y) = 0$ symmetrisch is, [waarvoor $m = n$ moet zijn en de coëfficienten zoodanig dat door de verwisseling van x en y de vergelijking niet verandert], zijn alle paren dier verwantschap involutorisch.

Met het punt $P \equiv X$ komen dan *m* punten $\overline{Y} \equiv Q$ overeen, terwijl met hetzelfde punt $P \equiv Y$ dezelfde *m* punten $Q \equiv \overline{X}$ overeenstemmen, wat het kenmerk van involutorische paren is.

We beschouwen als voorbeeld een involutorische verwantschap (2, 2) afgebeeld op een kegelsnede C^2. Zij de kegelsnede D^2 de directiekromme. We kiezen op C^2 het willekeurige punt X en trekken uit X twee raaklijnen aan D^2, waardoor op C^2 de punten Y_1 en Y_2 worden ingesneden. Uit het punt $Y_1 \equiv X'$ gaan dan twee raaklijnen aan D^2 die de punten $X \equiv Y_1'$ en Y_2' insnijden op C^2. Was $Y_2 \equiv Y_2'$, dan hadden we een cubische involutie, waarin de punten X, Y_1, Y_2, een gesloten groep vormen.

Immers de groep X, Y_1, Y_2, bepaalt drie raaklijnen. Kies nog twee raaklijnen P_1, P_2 en P_1, P_3. De drietallen X, Y_1, Y_2 en P_1, P_2, P_3 bepalen een cubische involutie. De involutiekegelsnede dezer cubische involutie heeft vijf raaklijnen

gemeen met D^2, en is dus identiek met D^2. De involuties zijn dan ook identiek.

Gemakkelijk is uit het bovenstaande af te leiden dat een cubische involutie bepaald is door een drietal en twee paren. Zij A_1, A_2, A_3, het gegeven drietal; B_1, B_2 en C_1, C_2 de beide paren.

Elk dezer punten is toegevoegd aan twee andere; behoort dus tot eene (2, 2). Van de directiekegelsnede dezer (2, 2) zijn vijf raaklijnen gegeven, die tevens raaklijnen van de involutiekegelsnede zijn. De twee bedoelde kegelsnede vallen samen en derhalve zijn de involuties weder identiek. Wij vonden het laatste in 't vorige hoofdstuk langs anderen weg.

De symmetrische verwantschap (m, n) zal $(m + m) = 2m$ *coïncidenties* bezitten, dat zijn punten die met hun toegevoegde samenvallen.

Zijn aan het punt X de *m* punten X′ toegevoegd en vallen van deze laatste punten er twee samen, dan hebben we een *dubbelpunt* X′, met het punt X als *vertakkingselement*. Het aantal van beide is $2m(m - 1)$.

---

§ 4. Collocale stelsels.

Men kan zich op een zelfde kegelsnede voorstellen eene verwantschap (m, n) tegelijk aanwezig met eene involutie I_p.

Zij hebben directiekrommen van klasse $(m + n)$ en $(p - 1)$. Het aantal gemeenschappelijke raaklijnen dier beide krommen is derhalve $(m + n)(p - 1)$. Anders gezegd:

«Eene verwantschap (m, n) en eene I_p die collocaal zijn hebben steeds $(m + n)(p - 1)$ gemeenschappelijke paren».

Een symmetrisch elementenstelsel (m, n) heeft eene directiekromme van klasse *m*. Is zoo'n stelsel collocaal met eene I_p op een kegelsnede dan zullen er blijkbaar $m(p - 1)$ gemeenschappelijke paren zijn.

Twee stelsels (m, n) en (m′, n′) hebben $(m + n)(m' + n')$ gemeenschappelijke paren en twee symmetrische stelsels (m, m) en (m′, m′) zullen $m m'$ gemeenschappelijke paren be-

zitten, wanneer zij tegelijk op een zelfde kegelsnede aanwezig zijn.

Twee verwantschappen beide met symbool (m, n) moeten $(m + n)^2$ paren gemeen hebben, en

Twee symmetrische stelsels beide van graad m, moeten m^2 paren gemeen hebben wanneer zij collocaal zijn.

Worden de besprokene stelsels door projectie overgebracht op andere rationale dragers dan zullen de genoemde stellingen blijven gelden.

De verkregene resultaten zijn ook *algebraïsch* te verkrijgen uit de meermalen gebruikte verwantschapsvergelijking $f(x, y) = 0$.

---

§ 5. Involuties van hoogeren rang.

Volgens de gegevene bepaling van involutie moest elke groep van p elementen, door één dier elementen onverschillig welk, bepaald worden.

We spraken dan over eene involutie van den p^{en} graad; we hadden er bij kunnen voegen «en van den *eersten* rang, want er bestaan ook involuties van *hoogeren* rang.

Bepaling. «Onder eene *involutie* van den p^{en} *graad* en den k^{en} *rang* verstaat men een elementenstelsel bestaande uit groepen van p elementen, waar elke groep door k willekeurige elementen bepaald is.»

Het symbool voor zoo'n stelsel is I^k_p. Voor de I_p is nu $k = 1$, vandaar dat we dan over eene involutie van den eersten rang zouden kunnen praten.

Dergelijke puntenstelsels laten zich gemakkelijk denken. Eene vlakke cubische kromme wordt door alle rechten uit het vlak, gesneden volgens de groepen eener involutie van den *derden* graad en den *tweeden* rang, I^2_3.

Alle vlakken der ruimte snijden een rationale ruimtekromme R_p volgens de groepen eener involutie van den p^{en} graad en den *derden* rang, I^3_p.

De studie dezer hoogere involuties wordt eenigszins ingewikkelder.

Door *k* geheel willekeurige elementen wordt een groep van p elementen bepaald. Natuurlijk $k < p$. Neem nu eens $(k - 1)$ elementen $e_1, e_2 \ldots\ldots\ldots e_{k-1}$ willekeurig aan dan is nog slechts *één* ander willekeurig punt noodig om een groep van p punten te bepalen, als wij het tenminste over eene *punten*involutie hebben. Denk verder de gekozen $(k - 1)$ punten als *vast*, dan blijkt dat de veranderlijke punten eene I_{p-k+1} vormen van den *eersten* rang.

Deze involutie I_{p-k+1} bezit $2(p - k)$ dubbelpunten, d. w. z. wanneer men $(k - 1)$ punten $e_1, e_2 \ldots\ldots\ldots e_{k-1}$ willekeurig kiest zijn er $2(p - k)$ groepen waarin die punten $e_1, e_2 \ldots\ldots e_{k-1}$ voorkomen en waarin bovendien een dubbelpunt aanwezig is. Toch hoeft zoo'n dubbelpunt niet steeds buiten de $(k - 1)$ punten e te vallen, want elk dier punten zal in een bijzonder geval dubbelpunt kunnen worden. Men mag immers elk der punten e als dubbelpunt beschouwen en dan is telkens een groep van p punten bepaald.

We nemen nu het aantal *vaste* punten één minder; we denken bijv. de punten $e_1, e_2 \ldots\ldots\ldots e_{k-2}$ als *vaste* punten. Zoodra het punt e_{k-1} er willekeurig bij gekozen wordt, zijn er $2(p - k)$ groepen bepaald met een dubbelpunt D, zooals boven bleek. Een willekeurig dubbelpunt D zal echter met de $(k - 2)$ punten e een heele groep van p punten vastleggen, of één punt D bepaalt $(p - k)$ punten e_{k-1}. We zien tusschen de punten D en de punten e_{k-1} eene verwantschap ontstaan van den vorm

$$\{(p - k), \; 2(p - k)\}.$$

Zij bezit volgens vroeger $3(p - k)$ dubbelelementen; zoo vaak valt een punt D met een punt e_{k-1} samen.

De samenvalling van een punt D met een punt e_{k-1} doet een *drievoudig* punt ontstaan, m. a. w. $(k - 2)$ willekeurig gekozen elementen zullen in $3(p - k)$ groepen met een drievoudig element voorkomen. Weder zal elk dier $(k - 2)$ vaste elementen als drievoudig mogen aangenomen worden, waardoor telkens een groep van p punten bepaald is.

Zijn er $(k - 3)$ punten $e_1, e_2 \ldots\ldots\ldots e_{k-3}$ vast, dan zal één

willekeurig punt e_{k-2} voldoende zijn om $3(p-k)$ groepen met een drievoudig punt $\triangle$ te bepalen, en wordt bij die $(k-3)$ punten e een punt $\triangle$ gevoegd, dan is een heele groep bepaald of wel zijn dan $(p-k)$ punten e_{k-2} aangewezen. Tusschen de punten $\triangle$ en e_{k-2} bestaat daarom eene verwantschap met symbool

$$\{(p-k),\ 3(p-k)\}.$$

De $4(p-k)$ dubbelelementen dezer verwantschap zijn $4(p-k)$ *viervoudige* punten der involutie, en het blijkt hieruit dat $(k-3)$ geheel willekeurig gekozen elementen in $4(p-k)$ groepen met een viervoudig element voorkomen. Elk der $(k-3)$ vaste punten e is ook als viervoudig element op te vatten, waardoor telkens een groep van p elementen bepaald is.

Het algemeene resultaat is uit het besprokene af te leiden. Worden n.l. $(k-l)$ willekeurige elementen vastgehouden dan komen die in $(l+1)(p-k)$ groepen tegelijk met een $(l+1)$-voudig element voor. Voor het grensgeval $l=k-1$ zien we dat ieder punt e der involutie I^k_p in $k(p-k)$ groepen met een k-voudig element voorkomt. Een k-voudig element bepaalt echter een heele groep van p punten dus nog $(p-k)$ punten e. De verwantschap tusschen de punten e en de k-voudige punten der I^k_p moet derhalve voorgesteld worden door

$$\{(p-k),\ k(p-k)\}.$$

Zij geeft $(k+1)(p-k)$ punten der involutie I^k_p aan die $(k+1)$-voudig zijn.

In elke involutie van den p^{en} graad en den k^{en} rang is het aantal der $(k+1)$-voudige elementen

$$(k+1)(p-k).$$

Men kan steeds k punten geheel naar willekeurig kiezen, steeds zal een groep van p punten bepaald zijn. Zoo kan men ze ook laten samenvallen twee, drie, enz. tot k toe. Elk punt als k-voudig element opgevat zal ook een groep van p punten bepalen. Valt nu een der toegevoegde punten met 't k-voudige samen dan ontstaat een $(k+1)$-voudig punt.

Hun aantal is nu gevonden.

§ 6. In een I_p^2 zal iedere groep van p elementen door twee geheel willekeurig gekozen elementen bepaald zijn. Doch het komt voor dat twee elementen e_1 en e_2 geen groep bepalen. Het eenvoudigste is dat we weten de beide elementen e_1 en e_2 komen voor in *twee* groepen. Dan moeten zij noodzakelijk in alle groepen der I_p^2 thuis behooren.

Stel toch de I_p^2 algebraïsch voor door de vergelijking:

$$f_0 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = 0$$

waarin de functies f van den p^{en} graad in de veranderlijke x zijn. Zijn nu twee elementen e_1 en e_2 bekend dan weten we de bijbehoorende waarden x_1 en x_2, die gesubstitueerd in de genoemde vergelijking, twee van die vergelijkingen doen ontstaan, zoodat uit dat tweetal de beide parameters λ_1 en λ_2 oplosbaar worden.

Zet nu in de bovenstaande vergelijking de gevonden waarden van λ_1 en λ_2, dan heeft men ééne vergelijking van den p^{en} graad in de veranderlijke x. De p wortels dezer vergelijking bepalen nu de p elementen eener groep, waaronder ook de gegevene e_1 en e_2. Zoo vinden we dan de groep van p elementen zoodra er twee gegeven zijn. Ook kan hieruit blijken dat het geheel onverschillig is, van welke twee elementen men oorspronkelijk uitging.

Maar in geval nu de functies f_0 en f_1 twee groepen voorstellen, die beide het paar $e_1 e_2$ bevatten, zullen zij een factor ϕ bevatten van den *tweeden* graad in x. De vergelijking $\phi = 0$ levert dan de elementen e_1 en e_2 op.

Handelt men als boven door de beide wortels van $\phi = 0$ in de vergelijking der I_p^2 te substitueeren dan ontstaan twee vergelijkingen

$$\lambda_2 f_2^{x_1} = 0 \text{ en } \lambda_2 f_2^{x_2} = 0.$$

De eenige oplossing is $\lambda_2 = 0$, zoodat de groep die e_1 en e_2 bevat gevonden moet worden uit de vergelijking

$$f_0 + \lambda_1 f_1 = 0.$$

De parameter λ_1 is echter onbepaald; hij kan alle waarden

hebben en wij zien daaruit dat wanneer twee elementen e_1, e_2 in twee groepen voorkomen, zij in de oneindig vele groepen voorkomen, voorgesteld door de laatste vergelijking. Zoo'n paar noemt men een *neutraal* elementenpaar.

Een makkelijk voorbeeld geeft eene cubische vlakkekromme met een lus.

De rechten van het vlak teekenen er eene I_3^2 op af. De raaklijnen in den knoop geven het *neutrale puntenpaar* zooals blijkt bij projectie op eene rechte.

Hoe groot is nu het aantal *neutrale* elementenparen eener I_p^2?

Houden we het element e_1 vast dan zijn de overige elementen in een I_{p-1} gerangschikt. Evenzoo wanneer we een geheel willekeurig element e_2 vasthouden; dan houden we eene J_{p-1} over. Dit zagen we vroeger. Die beide involuties I_{p-1} en J_{p-1} hebben $(p-2)^2$ paren gemeen, waaronder begrepen zijn alle paren gevormd uit de $(p-2)$ elementen, die met e_1 en e_2 een groep vormen. Deze $(p-2)$ elementen vertegenwoordigen $\frac{1}{2}(p-2)(p-3)$ gemeenschappelijke paren, en zoo schieten er $(p-2)^2 - \frac{(p-2)(p-3)}{1.2} = \frac{(p-1)(p-2)}{1.2}$ over, die met e_1, in de éene, met e_2 in de andere groep voorkomen.

De I_p^2 bezit dus $\frac{(p-1)(p-2)}{1.2}$ *neutrale* elementparen.

Bij eene I_p^3 komen op dezelfde manier *neutrale drietallen* voor. Wordt het willekeurig gekozen element e_1 vastgehouden dan blijft eene I_{p-1}^2 over, met $\frac{1}{2}(p-2)(p-3)$ neutrale paren, terwijl elk neutraal paar met het vaste punt e_1 een neutraal drietal oplevert. We vinden hieruit dat elk element der I_p^3 in $\frac{1}{2}(p-2)(p-3)$ neutrale drietallen optreedt.

Gaan wij over tot eene I_p^4 en houden wij twee elementen e_1 en e_2 vast dan schiet er eene I_{p-2}^2 over met $\frac{1}{2}(p-3)$ $(p-4)$ neutrale paren, die met e_1 en e_2 evenveel *neutrale viertallen* vormen.

Twee willekeurige elementen eener I_p^4 komen in $\frac{1}{2}(p-3)$ $(p-4)$ neutrale viertallen voor.

Het algemeene resultaat zal zijn dat (k — 2) willekeurig gekozen elementen eener I_p^k in

$$\frac{(p-k)(p-k+1)}{1.2.}$$

neutrale k-voudige groepen voorkomen.

In een I_p^k mag men steeds *k* elementen geheel willekeurig kiezen, en men kan ze daarom aan k voorwaarden laten voldoen. Men kan vragen naar het aantal groepen met *k* dubbelelementen. Bij eene I_p^2 dus naar het aantal groepen met twee dubbelelementen. We hebben afgeleid dat elk element e_1 eener I_p^2 in 2 (p — 2) groepen met een dubbelelement D voorkomt. In zoo'n groep zijn dan aan het element e_1 nog (p — 3) dergelijke elementen e toegevoegd. Voeg nu twee elementen e_1 en e aan elkaar toe wanneer ze met D in één groep liggen. Zij vormen dan een symmetrisch elementen stelsel met kenmerkend getal 2 (p — 2) (p — 3). Dit stelsel bezit 4 (p — 2) (p — 3) dubbelelementen D′, die dus naast het dubbelpunt D in een zelfde groep voorkomen. Van D′ uitgaande vindt men ook het dubbelelement D. Derhalve zijn er 2 (p — 2) p — 3) groepen in eene I_p^2, die elk twee dubbelelementen bevatten.

Hoeveel groepen met drie dubbelelementen zijn er nu bij eene I_p^3? We houden weer één element e_1 vast, dan vormen de overige eene I_{p-1}^2 die 2 (p — 3) (p — 4) groepen met twee dubbelelementen bezit. In zoo'n groep zijn nog (p — 5) elementen e; tusschen de elementen e_1 en e bestaat blijkbaar eene symmetrische overeenkomst van den graad 2 (p — 3) (p — 4) (p — 5), welke 4 (p — 3) (p — 4) (p — 5) dubbelelementen heeft. Zij komen echter drie aan drie in één groep voor.

Derhalve bezit eene I_p^3

$$4/3\,(p-3)(p-4)(p-5) = \frac{2^3\,(p-3)(p-4)(p-5)}{1.2.3.}$$

groepen met drie dubbelelementen.

Voor eene I_p^4 is geheel analoog te vinden dat er

$$\frac{2^4 (p-4)(p-5)(p-6)(p-7)}{1.2.3.4.}$$

groepen met vier dubbelpunten zijn.

Voor eene I_p^k vindt men dat er

$$\frac{2^k (p-k)(p-k-1)..........(p-2k+1)}{1.2..........................k.}$$

groepen met k dubbelpunten zijn.

---

§ 7. COLLOCALE INVOLUTIES VAN HOOGEREN RANG.

Op eenzelfden drager stellen wij ons voor eene I_p^1 en eene I_q^2, en wij willen onderzoeken hoeveel groepen van *drie* elementen die twee involuties gemeen hebben.

Een element p van de involutie I_p^1 bepaalt nog $(p-1)$ andere elementen p'; elk dezer elementen p' bepaalt met het eerste element p eene groep der I_q^2. Er zijn nu $(p-2)$ elementen $\bar{p}$ en $(q-2)$ elementen $\bar{q}$ over. Valt 'n element $\bar{p}$ met een element $\bar{q}$ samen dan zijn de drie elementen p, p' en $\bar{p} \equiv \bar{q}$ aan de beide involuties gemeen. We zoeken dus het verband bestaande tusschen de bedoelde elementen $\bar{p}$ en $\bar{q}$.

Een element $\bar{p}$ bepaalt $(p-1)$ elementen der I_p^1, welke $1/2\,(p-1)(p-2)$ paren (p, p') vertegenwoordigen, terwijl elk paar $(q-2)$ elementen $\bar{q}$ aanwijst,

Een element $\bar{q}$ vasthoudende, vormen de overige elementen eene I_{q-1}^1, die met de I_p^1 gemeen heeft $(p-1)(q-2)$ paren. Elk paar bepaalt $(p-2)$ elementen $\bar{p}$.

De verwantschap der elementen $\bar{p}$ en $\bar{q}$ is volgens het bovenstaande

$$[1/2\,(p-1)(p-2)(q-2), \quad (p-1)(p-2)(q-2)]$$

Zij heeft $3/2\,(p-1)(p-2)(q-2)$ dubbelementen; zooveel gemeenschappelijke drietallen moeten er nu zijn. Maar zoo'n

drietal (p, p', p'') staat gelijk met drie paren en daarom is het aantal gemeenschappelijke drietallen der I^1_p en I^2_q

$$\frac{(p-1)(p-2)}{1.2.}(q-2).$$

Het aantal viertallen elementen dat eene involutie I^1_p en eene involutie I^3_q gemeen hebben, vindt men op een soortgelijke wijze. Kies drie elementen p, p' en p'' der I^1_p uit één groep, dan bepalen zij $(p-3)$ elementen $\overline{p}$ der I^1_p en $(q-3)$ elementen $\overline{q}$ der I^3_q, en wij hebben slechts het aantal gevallen $\overline{p} \equiv \overline{q}$ te bepalen.

Een punt $\overline{p}$ bepaalt $(p-1)$ punten p die $\frac{(p-1)(p-2)(p-3)}{1.2.3.}$ drietallen kunnen vormen; en elk drietal wijst $(q-3)$ punten $\overline{q}$ aan.

Een punt $\overline{q}$ bepaalt eene I^2_{q-1}, die met de I_p volgens boven gemeen heeft

$$\frac{(p-1)(p-2)}{1.2.}(q-3) \text{ drietallen,}$$

terwijl door elk zoo'n drietal $(p-3)$ punten $\overline{p}$ zijn aangewezen. Uit het gezegde ziet men licht in dat tusschen de elementen $\overline{p}$ en $\overline{q}$ de overeenkomst

$$\left[\frac{(p-1)(p-2)p-3)}{1.2.3.}(q-3), \frac{(p-1)(p-2)(p-3)}{1.2.}(q-3)\right]$$

$$\text{bestaat, die } \frac{4(p-1)(p-2)(p-3)}{1.2.3.}(q-3)$$

dubbelementen bezit. Zooveel gemeenschappelijke viertallen moeten er dan ook zijn.

Maar één viertal staat gelijk met vier drietallen, vandaar dat het aantal gemeenschappelijke viertallen eener I_p en eener I^3_q ten slotte is

$$\frac{(p-1)(p-2)(p-3)}{1.2.3.}(q-3)$$

De behandelde gevallen geven ons het recht om in het algemeen te beweren dat het aantal groepen van $(k+1)$ elementen, gemeenschappelijk aan een involutie I_p^1 en aan eene involutie I_q^k voorgesteld zal worden door

$$\frac{(p-1)(p-2)\ldots\ldots\ldots(p-k)}{1.2\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k}(q-k) \quad (*)$$

Op soortgelijke wijze vindt men als oplossing van de meest algemeene vraag, dat eene involutie $I_p^{k'}$ en eene involutie I_q^k

$$\frac{(p-k')(p-k'-1)\ldots\ldots(p-k'-k+1)}{1.2\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k.}\times$$
$$\times\frac{(q-k)(q-k-1)\ldots\ldots(q-k'-k+1)}{1.2\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots k'}$$

groepen van $(k+k')$ elementen gemeen hebben. Alleen de berekening is meer omslachtig. (*)

---

§ 8. De I_3^2 op een cubische vlakke kromme met een lus.

Als eenvoudige toepassing van de voorgaande algemeene beschouwingen over involuties van hoogeren rang, zullen wij behandelen de involutie van den derden graad en tweeden rang, welke op een cubische kromme met een dubbelpunt wordt ingesneden door alle rechten uit het vlak.

Een I_p^2 bezit $1/2\ (p-1)(p-2)$ neutrale paren en bijgevolg bezit de I_3^2 slechts één neutraal puntenpaar, dat blijkbaar in het dubbelpunt D is te vinden, want iedere rechte door het punt D geeft een drietal der involutie terwijl steeds twee punten in D vallen. Het paar $D_1 \equiv D_2 \equiv D$ behoort dus in oneindig vele groepen thuis.

Wij nemen in het vlak een willekeurige rechte l en projecteeren op die rechte l de involutie en wel uit het dubbelpunt D. Op l ontstaat dan mede eene J_3^2 als afbeelding van de involutie op de cubische kromme. Door middel van een

---

(*) Zie voor de rechtstreeksche afleiding van dit resultaat G. K. NUGTEREN, Proefschrift. Utrecht 1901.

moet de laatste vergelijking een wortel $x = 0$ bezitten, wat eischt dat $a_3 = 0$. Voor de twee andere drievoudige punten houden wij de vierkantsvergelijking

$$a_0 x^2 + 3 a_1 x + 3 a_2 = 0 \text{ over.}$$

Hare discriminant is $D' = -3(4 a_0 a_2 - 3 a_1^2)$.

De voorafgaande vierkantsvergelijking der neutrale punten heeft tot discriminant $D = a_2^2 (4 a_0 a_2 - 3 a_1^2)$ en zoo zien wij dat D en D′ steeds van teeken verschillen.

Is $D > 0$ dan wil dat meetkundig zeggen, er bestaan twee reëele neutrale punten. Het gevolg is dat dan $D' < 0$ en dat er twee buigpunten imaginair moeten zijn. Anders gezegd: heeft de cubische kromme twee reëele dubbelpuntsraaklijnen dan bezit zij slechts één bestaanbaar buigpunt.

Is echter $D < 0$ en bezit de C_3 alzoo een geïsoleerd punt dan is $D' > 0$ d. w. z. alle buigpunten zijn reëel.

Zijn D en D′ beide nul dan vallen de twee neutrale punten samen; zij vormen een *neutraal dubbelpunt* der J_3^2. Dan vallen ook twee buigpunten samen en wel in het keerpunt dat de C_3 alsdan bezit. Hebben wij een cubische kromme met een knoop dan kunnen wij de drager l der involutie J_3^2 of de zoogenaamde beeldrechte evenwijdig aan een dubbelpuntsraaklijn nemen en het nulpunt N daar kiezen waar de andere dubbelpuntsraaklijn de beeldrechte snijdt, waardoor wij de vergelijking der J_3^2 kunnen vereenvoudigen. De algemeene vergelijking was

$$a_0 x_1 x_2 x_3 + a_1 \Sigma x_1 x_2 + a_2 \Sigma x_1 + a_3 = 0.$$

De neutrale punten moeten nu door $x_1 = 0$ en $x_2 = \infty$ gegeven worden. Voor deze beide substituties moeten wij dus $x_3 = \frac{0}{0}$ vinden. Wij zetten de laatste vergelijking in den vorm

$$\left\{ a_0 x_1 + a_1 \left(\frac{x_1}{x_2} + 1\right) + \frac{a_2}{x_2} \right\} x_3 + \left\{ a_1 x_1 + a_2 \left(\frac{x_1}{x_2} + 1\right) + \frac{a_3}{x_2} \right\} = 0.$$

Stellen wij nu $\begin{cases} x_2 = \infty \\ x_1 = 0 \end{cases}$ dan komt er

op l gelegen nulpunt N mogen wij de verwantschapsvergelijking der I_3^2 schrijven in den vorm

$$a_0 x_1 x_2 x_3 + a_1 (x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3) + a_2 (x_1 + x_2 + x_3) + a_3 = 0$$

waarin de veranderlijke x de abscis van een punt der lijn l ten opzichte van N voorstelt.

Het blijkt dadelijk dat wanneer men twee punten kent, daardoor een derde punt bepaald is.

Voor x_3 is te vinden

$$x_3 = - \frac{a_1 x_1 x_2 + a_2 (x_1 + x_2) + a_3}{a_0 x_1 x_2 + a_1 (x_1 + x_2) + a_2}$$

In geval nu

$$\left. \begin{array}{l} a_0 x_1 x_2 + a_1 (x_1 + x_2) + a_2 = 0 \\ a_1 x_1 x_2 + a_2 (x_1 + x_2) + a_3 = 0 \end{array} \right\}$$

wordt

$$x_3 = \frac{0}{0} \text{ en dus onbepaald terwijl men vindt}$$

$$x_1 x_2 = \frac{a_1 a_3 - a_2^2}{a_0 a_2 - a_1^2} \qquad x_1 + x_2 = \frac{- a_0 a_3 + a_1 a_2}{a_0 a_2 - a_1^2}$$

De twee onbekenden x_1 en x_2 kunnen nu gevonden worden uit de vierkantsvergelijking:

$$(a_0 a_2 - a_1^2) x^2 + (a_0 a_3 - a_1 a_2) x + (a_1 a_3 - a_2^2) = 0.$$

Hieruit vinden wij twee punten die met elk willekeurig punt des dragers l een drietal der J_3^2 vormen. Het is het *neutrale paar*. Zij worden geprojecteerd door de raaklijnen in het dubbelpunt D.

In een I_p^k is het aantal $(k + 1)$-voudige elementen $(k + 1)(p - k)$, zoodat de I_3^2 drie drievoudige elementen zal bezitten. Om ze te vinden stellen wij in de verwantschapsvergelijking $x_1 = x_2 = x_3$; zij wordt dan:

$$a_0 x^3 + 3 a_1 x^2 + 3 a_2 x + a_3 = 0.$$

De drie wortels geven de drievoudige punten aan. Hieruit blijkt dat de C_3 drie buigpunten zal bezitten.

Steeds is één der drie wortels reëel en wij mogen het bestaanbare drievoudige punt als nulpunt N aannemen. Dan

$$a_1 x_3 + a_2 = o.$$

$$x_3 = -\frac{a_2}{a_1} \text{ derhalve } a_1 = a_2 = o.$$

De vereenvoudigde gedaante van de verwantschapsvergelijking der J_3^2 is nu

$$x_1 x_2 x_3 = \text{constante}.$$

Heeft in een ander geval de C_3 drie reëele buigpunten B en een geïsoleerd punt I dan kunnen wij de beeldrechte *l* evenwijdig aan de lijn $I B_1$ nemen en het nulpunt daar waar $I B_2$ de beeldrechte snijdt.

De vergelijking der drievoudige punten der J_3^2 was

$$a_0 x^3 + 3 a_1 x^2 + 3 a_2 x + a_3 = o,$$

Hieraan moeten nu $x = o$ en $x = \infty$ voldoen wat slechts gaat wanneer $a_0 = a_3 = o$. De vergelijking der J_3^2 vereenvoudigt zich in dit geval tot den vorm

$$x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = k (x_1 + x_2 + x_3).$$

Is ten slotte de C_3 voorzien van een keerpunt K en één reëel buigpunt B dan kieze men de beeldrechte *l* evenwijdig aan de lijn K B en het nulpunt in het neutrale dubbelpunt der involutie. Voor $x_1 = x_2 = o$ moet nu x_3 onbepaald worden, hetgeen vereischt dat $a_2 = a_3 = o$. Omdat verder aan de vergelijking der drievoudige punten $x = \infty$ moet voldoen, volgt $a_0 = o$, en wordt de vergelijking der J_3^2 gecondenseerd tot

$$x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = o.$$

De drievoudige punten worden gevonden uit $x^2 = o$ d. w. z. dat twee buigpunten in het keerpunt liggen.

HOOFDSTUK III.

§ 1. De involutie I_p op een willekeurige rationale vlakke kromme.

Aan het eind van het eerste hoofdstuk is gebleken, dat de punten eener rationale vlakke kromme C_n in de groepen eener involutie I_p kunnen gerangschikt worden, en dat van de involutiekromme Γ (of de omhullende van de verbindingslijnen van toegevoegde punten der I_p) het *geslacht* onveranderd bleef $1/2\ (p-2)\ (p-3)$ en ook het aantal dubbelpunten der I_p te weten $2\ (p-1)$. We moeten nu de *klasse* en den *graad* van Γ gaan bepalen.

We kiezen een punt M buiten de C_n tot centrum van een waaier. De stralen van dezen waaier M bepalen op de C_n een zoogenaamde centrale involutie I_n. Wordt vervolgens de kromme C_n punt voor punt afgebeeld op eene kegelsnede C_2 dan vinden wij op die kegelsnede de twee involuties J_p en J_n. Zij hebben involutiekrommen van de klasse $(p-1)$ en $(n-1)$. Die krommen bezitten dus $(p-1)$ $(n-1)$ gemeenschappelijke raaklijnen hetgeen wil zeggen dat de J_p en de J_n op de kegelsnede $(p-1)\ (n-1)$ gemeenschappelijke paren hebben.

Maar dan moeten de I_p en de I_n, die op de kromme C_n voorkwamen, ook $(p-1)\ (n-1)$ gemeenschappelijke paren bezitten. d. w. z. uit het willekeurige punt M gaan $(p-1)\ (n-1)$ raaklijnen aan de involutiekromme Γ; hare klasse is derhalve bepaald door

$$k' = (p-1)\ (n-1).$$

Het zelfde resultaat is te verkrijgen, door het punt M òp de kromme C_n te kiezen. Dan gaan uit $M \equiv P_1$ $(p-1)$

raaklijnen van Γ, nl. MP_2, $MP_3, \ldots\ldots MP_p$. De involutie door den waaier (M) op de kromme C_n te voorschijn geroepen, is nu eene I_{n-1}, die met de gegeven I_p zal gemeen hebben $(n-2)(p-1)$ paren.

Bijgevolg gaan door het punt M $(p-1)+(n-2)(p-1)=(p-1)(n-1)$ raaklijnen aan Γ of evenals boven

$$k' = (p-1)(n-1).$$

De rationale vlakke kromme C_n bezit het maximum aantal dubbelpunten. We weten dus

$$\delta = {}^1/_2\,(n-1)(n-2) \text{ en } k = n(n-1) - 2\,\delta = 2\,(n-1).$$

De kromme C_n en de omhullende Γ moeten diensvolgens $2\,(p-1)\,(n-1)^2$ gemeenschappelijke raaklijnen bezitten.

Hoe is het ontstaan dier raaklijnen te verklaren? Uit drie verschillende oorzaken.

In de eerste plaats geeft een dubbelpunt D der I_p een raaklijn in D aan de kromme C_n, die tevens raaklijn aan Γ is, omdat zij de twee samengevallen toegevoegde punten D verbindt. Zoo ontstaan $2\,(p-1)$ gemeenschappelijke raaklijnen, want er zijn $2\,(p-1)$ dubbelpunten in de I_p.

In de tweede plaats hebben we te letten op de punten S, die door de verbindingslijnen van toegevoegde punten op de kromme C_n worden ingesneden. Zoo geeft de lijn P_1P_2 (P_1 en P_2 zijn toegevoegde punten der I_p) natuurlijk $(n-2)$ snijpunten S met C_n. Vallen nu twee van die punten samen dan is de lijn P_1P_2 raaklijn aan de kromme C_n in dat coïncidentiepunt S en ze is reeds raaklijn aan Γ omdat ze twee toegevoegde punten P_1 en P_2 der involutie I_p verbindt; dus hebben we zoo een gemeenschappelijke raaklijn van C_n en Γ gevonden. Hoe groot is nu dat aantal dubbelpunten S?

Daarvoor beschouwen we de verwantschap, die tusschen de punten S onderling bestaat; wij noemen twee punten S en S′ aan elkaar toegevoegd, zoodra hunne verbindingslijn aan Γ raakt.

Door een punt S gaan $(p-1)(n-2)$ raaklijnen aan Γ,

terwijl iedere raaklijn $(n - 3)$ punten S' draagt. Bij één punt S behooren derhalve $(p - 1)\ (n - 2)\ (n - 3)$ punten S' en omgekeerd bij een punt S' evenveel punten S. De symmetrische verwantschap (S, S') heeft zoodoende tot kenmerkend getal $(p - 1)\ (n - 2)\ (n - 3)$, zoodat wij voor het gezochte aantal dubbelpunten $S \equiv S'$ vinden

$$2\ (p - 1)\ (n - 2)\ (n - 3).$$

Hieruit ontstaan nu evenveel gemeenschappelijke raaklijnen van Γ en C_n.

In de derde plaats moet gelet worden op de verwantschap tusschen de punten P en S, die op een zelfde verbindingslijn $P_1 P_2$ liggen. Immers, doet zich dit geval voor $P_2 \equiv S$, dan moeten de krommen C_n en Γ elkaar in zoo'n punt $P_2 \equiv S$ aanraken en de gemeenschappelijke raaklijn in het raakpunt der krommen is dan voor twee te tellen. Bij een punt P behooren $(p - 1)\ (n - 2)$ punten S, omdat P met $(p - 1)$ toegevoegde punten kan worden verbonden en op ieder van die verbindingslijnen $(n - 2)$ punten S te vinden zijn.

Door een punt S gaan $(p - 1)\ (n - 2)$ raaklijnen aan Γ, die elk twee punten P bevatten. Wij zien hieruit, dat de verwantschap tusschen de punten P en S tot symbool zal hebben

$$\{ 2\ (p - 1)\ (n - 2), (p - 1)\ (n - 2). \}$$

Deze overeenkomst bezit $3\ (p - 1)\ (n - 2)$ coincidenties, die evenveel raakpunten van Γ en C_n doen ontstaan. Het hieruit voortkomende aantal gemeenschappelijke raaklijnen is

$$6\ (p - 1)\ (n - 2).$$

Tellen wij de drie gevonden aantallen op dan komt er

$$2\ (p - 1) + 2\ (p - 1)\ (n - 2)\ (n - 3) + 6\ (p - 1)\ (n - 2) =$$
$$= 2\ (p - 1)\ (n - 1)^2$$

en hiermee zijn alle gemeenschappelijke raaklijnen van Γ en C_n verklaard.

De involutiekromme Γ zal ook een aantal dubbelraaklijnen bezitten. Een dubbelraaklijn ontstaat, wanneer de rechte

PP' nog een ander paar Q, Q' der involutie I_p bevat. De lijn PP' snijdt de kromme C_n nog in $(n-2)$ punten S. Aan zoo'n punt $S \equiv Q$ is in I_p b.v. toegevoegd het punt Q'. Wij voegen nu aan elkaar toe het punt Q' en de $(n-3)$ punten S' die op de rechte QPP' zijn gelegen. Aan het punt Q' zijn door de involutie $(p-1)$ punten Q toegevoegd, terwijl uit elk punt $Q \ldots . (n-2)(p-1)$ raaklijnen aan Γ gaan; op elk dier raaklijnen liggen $(n-3)$ punten S'.

Tusschen de punten Q' en S' bestaat derhalve een symmetrische verwantschap met kenmerkend getal $(n-2)(n-3)(p-1)^2$. Zij bezit dubbel zooveel coïncidenties $Q' \equiv S'$. Is echter $Q' \equiv S'$ dan hebben wij een dubbelraaklijn, waarop telkens vier coïncidenties tegelijk liggen. Wij zien hieruit, dat het aantal dubbelraaklijnen τ'_2 van Γ moet zijn

$$\tau'_2 = {}^1/_2\,(n-2)(n-3)(p-1)^2.$$

Eenvoudiger vindt men het aantal τ'_2 door op te merken, dat een dubbelraaklijn ontstaat, wanneer de I_p en het stelsel (S, S') een gemeenschappelijk paar hebben. Zij zijn op te vatten als twee symmetrische verwantschappen van de graden $(p-1)$ en $(p-1)(n-2)(n-3)$. Zooals bekend is, hebben die $(p-1)^2(n-2)(n-3)$ gemeenschappelijke paren, waaruit blijkt

$$\tau'_2 = {}^1/_2\,(p-1)^2(n-2)(n-3).$$

Zijn P, P', P'', toegevoegde punten der I_p, dan zijn de lijnen PP' en PP'' raaklijnen aan Γ.

De lijn PP' bevat nog $(n-2)$ punten S. We voegen de punten S en P'' aan elkaar toe en beschouwen de overeenkomst (P'', S). Door elk punt S gaan $(p-1)(n-2)$ raaklijnen aan Γ, die elk een paar PP' leveren, waar aan telkens $(p-2)$ punten P'' door de involutie zijn toegevoegd. Dus aan elk punt S zijn $(p-1)(p-2)(n-2)$ punten P'' toegevoegd.

Uit P'' gaan $(p-1)$ raaklijnen, die elk een punt P leveren en elk punt P bepaalt $(p-2)$ raaklijnen, dus $(p-2)(n-2)$ punten S. Maar nu heb ik elke raaklijn tweemaal

geteld. Derhalve zijn aan elk punt P″ toegevoegd $\frac{1}{2}(p-1)(p-2)(n-2)$ punten S. Het blijkt uit het bovenstaande, dat de verwantschap (P″, S) $\frac{3}{2}(p-1)(p-2)(n-2)$ coïncidenties moet hebben. Wordt echter $P'' \equiv S$, dan liggen op de lijn P, P′, S, drie punten der involutie I_p nl. P, P′ en $P'' \equiv S$. Die lijn is dan een drievoudige raaklijn aan Γ. De drie punten P, P′ en P″ op zoo'n drievoudige raaklijn gelegen zijn allen als een coïncidentie der verwantschap (P″, S) op te vatten.

Het aantal drievoudige raaklijnen τ'_3 van de involutie kromme Γ is daarom

$$\tau'_3 = \frac{1}{2}(p-1)(p-2)(n-2).$$

---

§ 2. De involutie I_p op een willekeurige rationale vlakke kromme.

Door een der formules van Plücker vinden wij nu voor den *graad* n′ van Γ

$$n' = k'(k'-1) - 2\tau'_2 - 6\tau'_3, \quad (\beta = 0.)$$

$$n' = (n-1)(p-1(np-n-p) -$$
$$-(n-2)(n-3)(p-1)^2 - 3(n-2)(p-1)(p-2)$$

$$n' = (p-1)(2n+p-6).$$

Voor het geslacht g′ van Γ geldt dan

$$g' = \frac{1}{2}(k'-1)(k'-2) - \tau' \ldots\ldots \tau' = \tau'_2 + 3\tau'_3.$$

$$g' = \frac{1}{2}(np-n-p)(np-n-p-1) -$$
$$-\frac{1}{2}(n-2)(p-1)(np-n-3).$$

$$g' = \frac{1}{2}(p^2-5p+6).$$

$$g' = \frac{1}{2}(p-2)(p-3).$$

Wij zien hieruit dat het geslacht nul is voor $p = 2$ of $p = 3$ d. w. z. voor de quadratische en de cubische involutie. De involutie I_p kan punt voor punt afgebeeld worden op een willekeurige kegelsnede C_2, waarop wij dan eene J_p krijgen. De omhullende Γ_0 van deze laatste involutie moet hetzelfde

geslacht hebben als de omhullende Γ van I_p. Blijkbaar is de omhullende van de $(p-1)^e$ klasse en dan is het geslacht van Γ_0

$$g_0 = 1/2\,(p-2)(p-3)$$

want in het algemeen heeft Γ_0 geen dubbelraaklijnen.

Nu geldt algemeen voor het geslacht van Γ

$$g' = 1/2\,(k'-1)(k'-2) - \tau' - \beta'$$

of omdat steeds $g_0 = g'$ is,

$$1/2\,(p-2)(p-3) = 1/2\,\{(n-1)(p-1)^2 - \\ - 3(n-1)(p-1) + 2\} - \tau' - \beta'.$$

$$2(\tau' + \beta') = (n-1)(p-1)^2 - 3(n-1)(p-1) + 2 - \\ - (p-2)(p-3).$$

of $$2(\tau' + \beta') = (p-1)(n-2)(np-n-3).$$

Doch wij vonden boven

$$2\tau' = (p-1)(n-2)(np-n-3).$$

Hiermee is het bewijs geleverd, dat $\beta' = 0$ is, hetgeen wij steeds als meetkundig duidelijk aannamen.

Wij hebben in het voorgaande den graad n' van de involutiekromme Γ langs indirecten weg bepaald. Wilden wij dien graad n' rechtstreeks bepalen dan zouden wij het aantal snijpunten van C_n en Γ kunnen zoeken.

Snijpunten van C_n en Γ ontstaan in de vertakkingspunten der I_p. Immers uit het punt P_1 gaan de raaklijnen $P_1 P_2, \ldots\ldots P_1 P_p$ aan Γ. Vallen nu bijv. de punten P_4 en P_5 samen dan vallen ook de raaklijnen $P_1 P_4$ en $P_1 P_5$ uit P_1 aan Γ getrokken samen, met het gevolg dat het vertakkingspunt P_1 op Γ terecht komt. Het aantal snijpunten van C_n en Γ op deze wijze ontstaan is $2(p-1)(p-2)$, overeenstemmende met het aantal vertakkingselementen der I_p.

Uit de vorige paragraaf is gebleken dat de kromme C_n en de omhullende Γ elkaar in $3(p-1)(n-2)$ punten aanraken. Daardoor zijn $6(p-1)(n-2)$ snijpunten verantwoord. Maar het geheele aantal snijpunten laat zich op deze manier niet makkelijk bepalen.

---

§ 3. De involutie I_p der raaklijnen aan een rationale vlakke kromme.

Zij gegeven de involutie I_p tusschen de raaklijnen eener vlakke rationale kromme C_n. Zoo'n I_p kan bijv. ontstaan door in de punten eener punteninvolutie van den p^{en} graad de raaklijnen te trekken.

Een groep van p toegevoegde raaklijnen bepaalt een aantal snijpunten, die ik S zal noemen, en wij gaan nu de meetkundige plaats zoeken van de snijpunten S der toegevoegde raaklijnen.

De *graad* n′ dier kromme S is eenvoudig te vinden. Wij vragen slechts hoeveel snijpunten van toegevoegde raaklijnen op een willekeurige rechte l gelegen zijn. De raaklijnen uit de punten van l aan de kromme C_n getrokken vormen eene I_k, wanneer k de klasse van C_n voorstelt. Wij zoeken nu het aantal paren dat de involutie I_k gemeen heeft met de I_p.

Om dit aantal te vinden beelden wij de C_n en daarmee de I_p en de I_k af op eene kegelsnede.

Voor de raaklijneninvolutie J_p aan de kegelsnede is de involutiekromme (S′) van den graad $(p - 1)$. De involutie J_k aan de kegelsnede heeft eene involutiekromme van den graad $(k - 1)$. De involutiekrommen van J_p en J_k hebben zoodoende $(p - 1)(k - 1)$ snijpunten, d. w. z. J_p en J_k hebben $(p - 1)(k - 1)$ gemeenschappelijke paren. De I_p en I_k aan de C_n hebben bijgevolg evenveel gemeenschappelijke paren, waarmee bewezen is dat er op elke willekeurige lijn l, $(p - 1)(k - 1)$ punten S voorkomen. De *graad* n′ van de involutiekromme (S) blijkt alzoo te zijn

$$n' = (p - 1)(k - 1).$$

We gaan verder met de bepaling van het aantal *dubbelpunten* δ'_2 van de involutiekromme (S). Beschouwen wij de toegevoegde stralen p en p′ die elkaar snijden in het punt S. Uit S gaan dan nog $(k - 2)$ raaklijnen t aan de kromme C_n. Noemen wij één dezer raaklijnen $t \equiv q$ dan is daaraan toegevoegd de raaklijn q′, en q met q′ bepalen het snijpunt S'. Buiten de raaklijn $t \equiv q$ gaan door S nog $(k - 3)$ raaklijnen t′ en deze alle voeg ik toe aan de raak-

lijn q', en beschouw de verwantschap (t', q'). Aan de raaklijn q' zijn toegevoegd $(p - 1)$ raaklijnen q en op elke raaklijn q liggen $(k - 2)$ $(p - 1)$ punten S. Bovendien gaan door elk punt S $(k - 3)$ raaklijnen t', zoodat ten slotte aan elke raaklijn q' zijn toegevoegd $(p - 1)^2 (k - 2) (k - 3)$ raaklijnen t'. De overeenkomst (t', q') is blijkbaar symmetrisch en zij zal dientengevolge $2 (p - 1)^2 (k - 2) (k - 3)$ coïncidenties moeten bezitten. Het gevolg van het voorkomen eener coïncidentie $q' \equiv t'$ is dat het punt S' met het punt S samenvalt. Er ontstaat dan een dubbelpunt $S \equiv S'$ der involutiekromme. Door het dubbelpunt $S \equiv S'$ loopen nu de vier lijnen $q \equiv t$, $q' \equiv t'$, p en p'. Maar het is duidelijk dat p en p' ook twee coïncidenties $p \equiv t'$, zullen vertegenwoordigen. Het met de coïncidenties $q' \equiv t'$ overeenstemmende aantal dubbelpunten $S \equiv S'$ is daarom

$$\delta'_2 = \tfrac{1}{2} (p - 1)^2 (k - 2) (k - 3).$$

Om het aantal *drievoudige* punten te bepalen, dat de involutiekromme bezit, redeneeren wij op de volgende manier. Een drievoudig punt zal ontstaan wanneer drie aan elkaar toegevoegde raaklijnen bijv. p, p' en p'' door één punt S gaan. Dan is dat punt S natuurlijk drievoudig. We letten op de verwantschap tusschen de raaklijnen t en p''. De raaklijnen p en p' bepalen het snijpunt S en de $(k - 2)$ andere raaklijnen uit S aan de kromme C_n noem ik t. Valt zoo'n raaklijn t met een raaklijn p'' samen dan gaan drie toegevoegde raaklijnen p, p' en p'' door één punt S, dat dan drievoudig wordt. Een raaklijn t bepaalt $(p - 1)$ $(k - 1)$ punten S, maar wij moeten de $(p - 1)$ punten S door de toegevoegde raaklijnen van t op t ingesneden niet hebben. Bij één raaklijn t behooren derhalve $(p - 1) (k - 2)$ punten S, terwijl elk punt S $(p - 2)$ raaklijnen p'' aangeeft. Bij één raaklijn t behooren dus $(p - 1) (p - 2) (k - 2)$ raaklijnen p''.

Door één raaklijn p'' zijn $(p - 1)$ toegevoegde raaklijnen p bepaald, die $\tfrac{1}{2} (p - 1) (p - 2)$ punten S aangeven, terwijl elk punt S nog $(k - 2)$ raaklijnen t bepaalt. Bij één raaklijn t vinden wij zoodoende $\tfrac{1}{2} (p - 1) (p - 2) (k - 2)$ raaklijnen p''.

De overeenkomst (t, p'') bezit nu $\frac{3}{2}(p-1)(p-2)(k-2)$ coïncidenties. Gaan echter de drie raaklijnen p, p' en p'' door één punt S dan is *S* drievoudig, maar er moet op gelet worden dat nu elk der drie raaklijnen p, p' en p'' een coïncidentie $p'' \equiv t$ voorstelt. Vandaar dat het aantal drievoudige punten der involutiekromme (S) is

$$\delta'_3 = \frac{1}{2}(p-1)(p-2)(k-2).$$

Om de *klasse k'* van de involutiekromme (S) te bepalen, gebruiken we de formule van PLÜCKER

$$k' = n'(n'-1) - 2\delta' \qquad \varkappa' = 0$$

In ons geval is $n' = (p-1)(k-1)$, en $\delta' = \delta'_2 + 3\delta'_3$, want om de formule toe te passen, moeten eerst alle drievoudige punten tot dubbelpunten herleid worden.
Wij vinden daardoor

$$k' = (p-1)(2k+p-6).$$

Het bestaan van keerpunten is in 't algemeen onmogelijk.

---

§ 4. DE INVOLUTIE I_2 OP EEN RATIONALE VLAKKE C_3.

Een cubische kromme C_3 met een dubbelpunt in D nemen wij als draagster eener involutie I_2. Om de I_2 te krijgen mogen wij twee paren A_1, A_2 en B_1, B_2 willekeurig op C_3 aannemen. Hierdoor is de involutie I_2 volkomen bepaald.

Wat is de involutiekromme Γ? De klasse van Γ is

$$k' = (p-1)(n-1) = 2.$$

Zoodat Γ eene kegelsnede moet zijn.

De cubische kromme C_3 en de omhullende Γ_2 hebben 6 snijpunten. De raaklijn $A_1 A_2$ snijdt de C_3 nog in een punt $P \equiv B_2$. Uit $P \equiv B_2$ gaat nu nog de raaklijn $B_2 B_1$ aan de omhullende Γ_2. Wanneer nu de lijn $A_1 A_2$ de cubische kromme raakt in het punt A_2, zal $P \equiv B_2 \equiv A_2$ worden en moet ook $A_1 \equiv B_1$ worden, d. w. z. de twee raaklijnen, die in 't algemeen uit het punt P aan Γ_2 gaan, zijn hier samengevallen, en we kunnen zeggen dat zij elkaar toch nog in

$P \equiv B_2 \equiv A_2$ snijden. Zoo zien wij dat het punt $P \equiv B_2 \equiv A_2$ òp de omhullende Γ_2 valt, en dat Γ_2 de lijn $A_1 A_2$ in het punt A_2 zal aanraken.

Zoo'n punt $P \equiv A_2$ is eene coïncidentie van de verwantschap (A, P). Deze bezit het symbool $(1, 2)$ zoodat er *drie* coïncidenties bestaan.

[Uit een punt A_1 gaat n. l. slechts ééne raaklijn $A_1 A_2$ die ook slechts één punt P op de C_3 insnijdt. En uit een willekeurig punt der C_3 dat ik als een punt P kan beschouwen gaat maar eene raaklijn van de soort $P A_1 A_2$. Bij één punt P behooren dus twee punten A. De andere raaklijn uit P verkrijgt men door P als een punt der I_2 te beschouwen. Uit $P \equiv B_1$ gaat dan nog de raaklijn $P B_2$, doch die bedoelen wij niet.]

De drie coïncidenties wijzen er op dat de cubische kromme C_3 en de involutiekromme Γ_2 elkaar in drie punten raken. Hierdoor zijn de 6 snijpunten van C_3 en Γ_2 te verklaren. De omhullende Γ_2 is dus een *driemaal-rakende* kegelsnede.

De C_3 is van de vierde klasse en Γ_2 van de tweede. Hunne acht gemeenschappelijke raaklijnen zijn nu gemakkelijk te verklaren, De drie raakpunten van C_3 en Γ_2 leveren er zes en de beide dubbelpunten der I_2 geven er nog twee bij.

---

§ 5. De involutie I_3 op eene rationale vlakke C_3.

Twee willekeurige drietallen A_1, A_2, A_3 en B_1, B_2, B_3 op een kromme C_3 met een knoop D bepalen een involutie I_3. Volgens onze gevonden resultaten heeft de involutie I_p op eene kromme C_n eene omhullende Γ waarvan de klasse $k' = (p-1)(n-1)$ en de graad $n' = (p-1)(2n+p-6)$.

Voor ons geval is $p = 3, n = 3$, en vinden wij

$$k' = 4, \; n' = 6, \; \tau'_3 = 1.$$

De rechtstreeksche afleiding van dit resultaat is echter belangrijk.

Uit het dubbelpunt D gaan vier raaklijnen aan Γ d. w. z. de *klasse* van Γ is $k' = 4$. Zoodoende bezitten C_3^4 en Γ^4

16 gemeenschappelijke raaklijnen. Hun ontstaan is als volgt te verklaren. De involutie I_3 bezit $2(p-1) = 4$ dubbelpunten, waarmee vier gemeenschappelijke raaklijnen verklaard zijn. Snijdt de lijn $A_1 A_2$ de cubische kromme in een punt P dan zien wij gemakkelijk in dat de verwantschap (A, P) tot symbool heeft (4, 2). [Want uit het punt A_1 gaan de twee raaklijnen $A_1 A_2$ en $A_1 A_3$ die elk één punt P aanwijzen, terwijl uit een punt der C_3, als een punt P opgevat, vier raaklijnen aan Γ kunnen getrokken worden, doch slechts twee van de soort $P C_1 C_2$; de andere twee verbinden $P = B_1$ met zijn beide toegevoegde punten B_2 en B_3. Bij één punt A behooren dus twee punten P en bij één punt P vier punten A.] Deze overeenkomst (4, 2) heeft 6 coïncidenties, waaruit blijkt, dat de krommen C^4 en Γ^4 elkaar in 6 punten R aanraken; hierdoor ontstaan 12 gemeenschappelijke raaklijnen. We hebben dus de *16* gemeenschappelijke raaklijnen verklaard.

De involutiekromme Γ bezit *èèn drievoudige* raaklijn. Zij ontstaat uit de lineaire groep die de I_3 bezit. Immers, zoodra de drie toegevoegde punten P_1, P_2, P_3 collineair d. w. z. op éène rechte liggen, is die rechte $P_1 P_2 P_3$ eene drievoudige raaklijn der omhullende Γ.

We moeten echter nog laten zien dat de I_3 zoo'n lineaire groep bezit.

We kunnen het zien uit de verwantschap bestaande tusschen het punt A_3 en het snijpunt P van de lijn $A_1 A_2$ met de cubische. Dat is eene (1, 2) met drie coïncidenties die éene drievoudige raaklijn bevatten.

Maar eigenaardig is een andere afleiding. We hadden de involutie I_3 bepaald door de beide drietallen A_1, A_2, A_3 en B_1, B_2, B_3. Nemen we nu het punt P geheel willekeurig op C_3 aan dan kunnen wij ons denken de kegelsneden

$$(A_1 A_2 A_3 D P) = \alpha \quad \text{en} \quad (B_1 B_2 B_3 D P) = \beta.$$

Klaarblijkelijk hebben de kegelsneden α en β nog twee snijpunten Q en R buiten de C_3.

De bundel kegelsneden bepaald door de vier grondpunten *D, P, Q, R* snijdt C_3 in de groepen eener cubische involutie J_3 [immers één punt X_1 op de C_3 aangenomen is voldoende om een exemplaar van den bundel aan te wijzen, en die kegelsnede snijdt dan nog de twee punten X_2 en X_3 op C_3 in]. Doch men ziet dat de involutie J_3 ook de twee groepen (A) en (B) bevat en derhalve dezelfde involutie is als de I_3 van uitgang. We namen het punt P geheel naar willekeur op de C_3 aan. Het blijkt hieruit dat elke cubische involutie I_3 op een cubische kromme door oneindig veel bundels van kegelsneden kan worden ingesneden. In den bundel *D P Q R* komt voor de ontaarding (D P, Q R). Het deel Q R moet nu drie punten P der C_3 bevatten. Die drie punten $P_1 P_2 P_3$ vormen het eenige lineaire drietal dat de I_3 bevat en de lijn $P_1 P_2 P_3$ is de gezochte drievoudige raaklijn der omhullende Γ.

Ten slotte is er nog een derde manier om het bestaan van een lineaire groep $P_1 P_2 P_3$ bij elke I_3 op een C_3 aan te toonen. Alle rechten uit het vlak nl. snijden de C_3 volgens een I^2_3 en deze heeft met de bestaande I_3 steeds één drietal gemeen, zooals uit het vorige hoofdstuk bekend is. En dat is dan de lineaire groep P der cubische involutie I_3.

Langs algebraischen weg laat zich ook gemakkelijk aantoonen dat eene I_3 en eene I^2_3 steeds één drietal gemeen hebben. We zagen dat de I^2_3 voor te stellen is door de vergelijking

$$a_0 x_1 x_2 x_3 + a_1 (x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3) + a_2 (x_1 + x_2 + x_3) + \\ + a_3 = 0 \ldots (1).$$

Zie vorig hoofdstuk. Op soortgelijke wijze laat zich nu de cubische involutie door twee vergelijkingen van denzelfden vorm vertegenwoordigen

$$\left. \begin{array}{l} b_0 x_1 x_2 x_3 + b_1 (x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1) + \\ \quad + b_2 (x_1 + x_2 + x_3) + b_3 = 0 \\ c_0 x_1 x_2 x_3 + c_1 (x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1) + \\ \quad + c_2 (x_1 + x_2 + x_3) + c_3 = 0 \end{array} \right\} (2)$$

Deze beide vergelijkingen zijn *lineair* in $x_1 x_2$ en $(x_1 + x_2)$ zoodra het punt x_3 gegeven is; dan kan men uit die twee vergelijkingen het product $x_1 x_2$ en de som $(x_1 + x_2)$ oplossen. Daarna kan men eene vierkantvergelijking samenstellen waarvan x_1 en x_2 de wortels moeten worden. Uit die vierkantsvergelijking vindt men dan x_1 en x_2 in functie van x_3. Bij één punt x_3 worden dus nog twee punten x_1 en x_2 gevonden, d. w. z. de beide vergelijkingen (2) stellen eene cubische involutie voor.

Willen wij nu het gemeenschappelijke drietal van de I_3 en de $I_3{}^2$ hebben, dan zoeken wij slechts de waarden x_1, x_2 en x_3 die aan de *drie* bovengenoemde vergelijkingen tegelijk voldoen. Het zijn drie trilineaire vergelijkingen. Maar nemen wij nu $x_1 x_2 x_3$, $\Sigma x_1 x_2$ en Σx_1 als onbekenden aan dan worden het lineaire vergelijkingen waaruit die onbekenden $x_1 x_2 x_3$, $\Sigma x_1 x_2$ en Σx_1 zijn op te lossen. Met deze drie waarden kan men nu eene vergelijking van den derden graad samenstellen, welker wortels de waarden van $x_1 x_2$ en x_3 bepalen. Dit is dan het gezochte drietal dat de I_3 en de $I_3{}^2$ steeds gemeen hebben.

Ter bepaling van den *graad* n' van Γ^4 gaan wij het aantal snijpunten van C_3 met Γ zoeken.

De 6 genoemde raakpunten R van C_3 en Γ^4 geven 12 snijpunten. Verder zal, wanneer $A_2 \equiv A_3$ is, de raaklijn $A_1 A_2$ met de raaklijn $A_1 A_3$ samenvallen, waardoor het punt A_1 op Γ komt. De vier dubbelpunten der I_3 doen zoo vier snijpunten ontstaan. Bovendien vormen de raaklijnen van de soort $P X_1 X_2$, $P Y_1 Y_2$ eene quadratische involutie, met twee dubbelstralen zoodat hiermee nog twee snijpunten worden verklaard. In 't geheel zijn er nu 18, waaruit voortvloeit dat de involutiekromme Γ van den 6^{en} graad is Γ^4_6.

Hetzelfde volgt uit

$$n' = k'(k' - 1) - 2\tau'$$
$$n' = 4 \times 3 - 2 \times 3 = 6.$$

---

§ 6. De involutie I_2 op een kromme van de vierde orde met drievoudig punt. (*)

Een kromme van de vierde orde met een drievoudig punt O, is van het geslacht nul en kan ons derhalve dienen als draagster eener quadratische involutie I_2.

De involutiekromme Γ is van de derde klasse.

Wij nemen het punt S' van C_4 willekeurig, en letten op de kegelsnedenbundels bepaald door de basispunten

$$(O, S', P_1, P_2) \text{ en } (O, S', Q_1, Q_2).$$

Die bundels doen nog twee andere quadratische involuties op de C_4 ontstaan, die een paar $S'' S'''$ gemeen hebben. Wij hebben dus de conische groepen

$$(O, S', S'', S''', P_1, P_2) \text{ en } (O, S', S'', S''', Q_1, Q_2)$$

waaruit blijkt dat een bundel kegelsneden met de grondpunten (O, S', S'', S''') eene involutie I_2 insnijdt, die de paren $P_1 P_2$ en $Q_1 Q_2$ bevat. Doch dan is zij noodzakelijk de involutie van uitgang, want eene involutie I_2 is door twee paren volkomen bepaald. Bedenkende dat het punt S' volkomen willekeurig werd gekozen, mogen wij zeggen, dat iedere quadratische involutie I_2 op een C_4 met drievoudig punt door oneindig veel kegelsnedenbundels kan worden ingesneden, terwijl de veranderlijke basispunten S eene cubische involutie I_3 vormen.

Wij noemen de involutie (S) toegevoegd aan de quadratische. Van de ontaardingen van den bundel (O, S', S'', S''') leveren de drie deelen $O S', O S''$ en $O S'''$ geen paren der I_2.

Alleen de rechten $S' S''$, $S'' S'''$ en $S' S'''$ geven paren der I_2. Wij hebben hier drie paren der I_3 die met drie paren der I_2 op éene rechte liggen.

Steeds ligt elk paar der quadratische involutie op een rechte met een paar der toegevoegde. Immers beschouw het paar A_1, A_2 der quadratische involutie en laat de verbindingslijn $A_1 A_2$ de C_4 nog in de beide punten $T' T''$

---

*) Zie: Jan de Vries, Versl. K. A. v. W., Amsterdam 1 Mei 1901.

ontmoeten. Dan moet blijken, dat $T' T''$ een paar der toegevoegde I_3 vertegenwoordigt. Hiertoe kiezen we ergens een ander paar B_1, B_2 der I_2 en merken op dat de vijf punten O, B_1, B_2, T', T'' een kegelsnede bepalen, die nog een achtste snijpunt T''' met de C_4 heeft. We kunnen nu zeggen dat door de vier punten O, T', T'', T''' twee kegelsneden gaan nl. $(O, T', T'', T''' B_1, B_2)$ en de ontaarde kegelsnede $(O\ T''',\ T'\ T'')$ waarvan de eerste het paar B_1, B_2, de tweede het paar A_1, A_2 der I_2 insnijdt; de bundel kegelsneden bepaald door de vier grondpunten O, T', T'', T''', doet derhalve op de gegeven C_4 de aanwezige quadratische involutie ontstaan en hiermee is bewezen dat de punten $T' T''$ toegevoegde punten der «toegevoegde» zijn.

De verbindingslijnen A_1, A_2 van de paren der quadratische involutie I_2 zijn de raaklijnen der omhullende Γ^3; en tegelijkertijd zijn het de verbindingslijnen van toegevoegde punten T', T'' der cubische involutie en dus raaklijnen van de involutiekromme behoorende bij de I_3; zoodat de beide toegevoegde involuties I_2 en I_3 de *zelfde* involutiekromme Γ^3 hebben. Door deze kenmerkende eigenschap zijn wij in staat, de verdere bijzonderheden van Γ^3 op andere wijze te verkrijgen, dan in het algemeene geval eener I_p. Voor de omhullende Γ der I_2 geldt

$$k' = (p-1)(n-1) = 3,$$
$$n' = (p-1)(2n+p-6) = 4,$$
$$\tau'_2 = 1/2\,(n-2)(n-3)(p-1)^2 = 1,$$
$$g' = 1/2\,(p-2)(p-3) = 0.$$

Daar de I_2 en de I_3 eene gemeenschappelijke involutiekromme hebben is elk punt der C_4 het snijpunt van drie raaklijnen aan Γ, want elk punt der C_4 is dan als een punt P der I_2 maar tevens als een punt S' der I_3 aan te zien. Op zoo'n manier zijn aan het punt $P_1 \equiv S'$ toegevoegd drie punten nl. P_2, S'' en S''', dus gaan door elk punt der C_4 drie raaklijnen d. w. z. de klasse der omhullende Γ is drie.

Dat de C_4 en Γ^3 elkaar in *zes* punten R raken, volgt uit de verwantschap bestaande tusschen de punten A en S der

I_2 en der I_3 die op een zelfde raaklijn liggen. Ze vormen eene (2, 4).

De I_3 bezit $2\,(p - 1) = 4$ vertakkingselementen V' en evenveel dubbelpunten $V'' = V'''$ die vier snijpunten van C_4 met Γ^3 en vier gemeenschappelijke raaklijnen in de punten $V'' \equiv V'''$ verklaren.

De snijpunten van C^4 met Γ liggen in de vertakkingspunten V'; want de beide uit V' vertrekkende raaklijnen $V'V''$ en $V'V'''$ zijn samengevallen.

Zoo hebben C_4 en Γ^3 $6 \times 2 + 4 = 12$ snijpunten en de omhullende is dan van den vierden graad Γ^3_4.

Nu is $$n' = k'(k' - 1) - 2\,\tau'_2.$$
$$4 = 3 \times 2 - 2\,\tau'_2$$

dus $\tau'_2 = 1$; er is één dubbelraaklijn.

Eene I_2 en een I_3 hebben twee paren gemeenschappelijk. De gevonden dubbelraaklijn bevat die twee paren.

De 18 gemeenschappelijke raaklijnen van C^6_4 en Γ^3_4 laten zich uit het bovenstaande licht verklaren.

§ 7. Als bijzonder geval der I_2 op de C_4 met een drievoudig punt O gaan wij na wat er gebeurt, wanneer in het punt O een paar $O'O''$ der I_2 is gelegen. Nu zal de klasse der omhullende Γ met één verlaagd worden en O wordt een klassepunt. De verbindingslijn der punten $O'O''$ is immers onbepaald. De eigenlijke involutiekromme is een *kegelsnede* Γ^2.

Snijdt de lijn $P_1 P_2$ de C_4 in de punten $S'S''$ dan vormen de punten S in dit geval een *quadratische* involutie J_2. De raaklijn welke het punt O''' verbindt met het punt dat door I_2 aan O''' wordt toegevoegd snijdt de C_4 in de beide punten O' en O'', zoodat $O'O''$ een paar is, ook van de toegevoegde J_2, De verwantschap tusschen de punten P en S is eene (2, 2), waaruit volgt dat de kromme C_4 in vier punten R door Γ_2 aangeraakt wordt, of dat Γ_2 eene viermaal rakende kegelsnede is. Trekt men in zoo'n punt R de raaklijn, dan snijdt ze nog twee punten T op de C_4 in, die beide aan het raakpunt R zijn toegevoegd. Is nu één punt R bekend,

dan weten we van de involutie I_2 of J_2 twee paren n.l. $O' O''$ en R met één van de tangentiaalpunten T. De involutie I_2 of J_2 is daardoor bepaald en de omhullende Γ_2 ook. Het blijkt dat door één punt R de drie andere raakpunten gevonden worden, of dat de punten R eene involutie I_4 vormen; want het is op oneindig veel manieren mogelijk op de C_4 quadratische involuties in te snijden die een paar in het punt O hebben, zoodat er ook oneindig veel groepen R ontstaan.

De algemeene I_2 kon ontstaan door een bundel kegelsneden met grondpunten O, S', S'', S''', waarin alleen *O* een vast punt was en S', S'', S''' tot eene I_3 behoorden. Neem nu bijv. S' ook vast en zoo dat $O' \equiv S'$ wordt, dan beteekent dit, dat alle kegelsneden de raaklijn t' in O' aan de C_4 aanraken; neem verder aan dat de punten $(S'' S''')$ een J_2 vormen. We krijgen op deze manier een bundel kegelsneden die de vaste rechte t' in O' raken en waarvan de twee verandelijke grondpunten een J_2 vormen, terwijl op de C_4 een quadratische involutie J_2 ontstaat. Bovendien wordt elk paar der I_2 met elk paar der J_2 door een kegelsnede verbonden. Omdat men de involutie J_2 op oneindig veel manieren op C_4 kan kiezen zal bij elke raaklijn in O een oneindig aantal bundels behooren.

In ons geval is nu de cubische involutie J_3 overgegaan in een quadratische J_2 en het punt O. Bij een raaklijn t' behooren derhalve oneindig veel krommen Γ, waarvan de raakpunten R een biquadratische involutie vormen, die blijkbaar *fundamentaal* is, d. w. z. alleen afhangende van de kromme C_4.

In 't geheel ontmoeten we zoo drie fundamentaal-involuties op de C_4 en drie stelsels van viermaal rakende kegelsneden.

De toegevoegde involutie J_2 moge een dubbelpunt hebben in D_1; de bundel bepaald door D_1 en de raaklijn in O''' snijdt op de C_4 een I_2 in met twee dubbelpunten D_{II} en D'_{II}. Er zijn derhalve twee kegelsneden die C_4 in D_1 en verder resp. in D_{II} en D'_{II} raken. De paren O', O'' en $D_1 D_{II}$ bepalen eene involutie I_2.

Leggen we de kegelsnede, die raakt in D_1, D_{II} en O''', dan blijkt dat het paar $D_1 D_{II}$ van I_2 met O''' wordt verbonden door een kegelsnede, die hetzelfde paar $D_1 D_{II}$ nog eens insnijdt, en omdat elk paar van I_2 met elk paar van J_2 door een kegelsnede wordt verbonden, die in O''' raakt, volgt dat $D_1 D_{II}$ ook een paar van de toegevoegde involutie J_2 moet zijn. $O' O''$ is nog een gemeenschappelijk paar. De twee involuties I_2 en J_2 zijn in dit geval identiek of samengevallen. De involutiekromme Γ_2 was een kegelsnede d. w. z. uit elk punt P_1 der C_4 gingen twee raaklijnen die P_1 verbonden met P_2 en met P'_2 [wanneer P_2 door I_2 en P'_2 door J_2 aan het punt P_1 is toegevoegd]. Maar $I_2 \equiv J_2$; dus $P_2 \equiv P'_2$ d. w. z. uit een willekeurig punt P_1 der kromme C_4 gaan steeds twee samenvallende raaklijnen aan de omhullende Γ wat er op wijst dat Γ ontaard is in een *dubbelpunt* $\triangle$.

Iedere lijn door $\triangle$ bevat twee paren der $I_2 \equiv J_2$ en het is duidelijk dat de twee dubbelpunten der $I_2 \equiv J_2$ door twee raaklijnen uit $\triangle$ aan C_4 moeten aangewezen worden. De overige vier raaklijnen zijn op deze manier natuurlijk niet te verklaren. Echter zijn twee dubbelraaklijnen der C_4 als een ontaardingsvorm der viermaal-rakende kegelsnede Γ op te vatten. Hun snijpunt is dan $\triangle$. Hiermee zijn de zes raaklijnen uit $\triangle$ aan C_4 verklaard.

De paren O', O'' en D_1, D'_{II} bepalen evenzoo een I_2 die met haar toegevoegde J_2 samenvalt. De beide andere dubbelraaklijnen der C_4 zijn dan als de viermaal-rakende kegelsnede te beschouwen.

De vier dubbelraaklijnen hebben zes snijpunten die we $\triangle$ kunnen noemen. Elk zoo'n punt $\triangle$ is op te vatten als middelpunt van een waaier die een fundamentale I_2 insnijdt, zoodat op elke straal twee paren voorkomen.

Bij het paar $O' O''$ behooren twee fundamentaalinvoluties, en twee ontaarde kegelsneden gevormd door de vier dubbelraaklijnen d_1, d_2, d_3, d_4. Stel dat bij de eene involutie behoort het paar $d_1 d_2$, met het snijpunt $\triangle_{12} \equiv d_1 d_2$, dan behoort vanzelf bij de andere involutie het paar d_3, d_4 met $\triangle_{34} \equiv d_3 d_4$. Want was dit niet het geval, zoodat bij de tweede involutie

behoorde het paar d_2, d_3 dan hadden de bedoelde involuties behalve het paar O', O'' nog het op de dubbelraaklijn d_2 gelegen paar gemeen en vielen zij samen, wat niet kan wanneer zij door waaiers met verschillende centra moeten ingesneden worden.

We nemen aan dat aan de fundamentaalinvoluties

die het paar O' O'' gemeen hebben $\triangle_{12}$ en $\triangle_{34}$ zijn toegevoegd
» » » O' O''' » » $\triangle_{13}$ en $\triangle_{24}$
» » » O'' O''' » » $\triangle_{23}$ en $\triangle_{14}$

De punten D_1 en D_{II} vormden een paar der eene I_2.

De punten D_1 en D'_{II} vormden een paar der andere I_2 welke aan $O' O''$ was toegevoegd. Bijgevolg moeten de punten $D_1, D_{II}, \triangle_{12}$ op eene rechte liggen en evenzoo de punten $D_1, D'_{II}, \triangle_{34}$.

Bepalen we eene involutie I_2 door het paar $O' O''$ en het dubbelpunt D_1, dan zijn volgens boven de punten D_{II} en D'_{II} de dubbelpunten der toegevoegde J_2.

Dezelfde involutie I_2 laat zich bepalen door het paar O', O'' en het tweede dubbelpunt D'_1, zoodat ook dan D_{II} en D'_{II} de dubbelpunten der toegevoegde J_2 zijn; dus bestaan de kegelsneden, die de C_4 raken, achtereenvolgens in O''', D'_1, D'_{II}.

Op dezelfde manier als boven bepalen de paren O', O'' en D'_1, D_{II} eene involutie die met haar toegevoegde samenvalt. Zoo ook de paren O', O'' en D'_1, D'_{II}.

De punten D'_1, D_{II} vormen een paar der ééne involutie, de punten D'_1, D'_{II} een paar der andere involutie, die aan $O' O''$ is toegevoegd. Bijgevolg moeten de punten D'_1, D'_{II}, $\triangle_{34}$ op een rechte liggen en evenzoo de punten $D'_1, D_{II}, \triangle_{12}$; want wij hadden al de collineaire drietallen $D_1, D_{II}, \triangle_{12}$ en $D_1, D'_{II}, \triangle_{34}$. Wij hebben hiermee de stelling bewezen dat de punten $\triangle_{12}$ en $\triangle_{34}$ de nevenhoekpunten zijn van den vierhoek $D_1 D_{II} D'_1 D'_{II}$ die in de C_4 beschreven is. De punten $\triangle_{12}$ en $\triangle_{34}$ zijn natuurlijk vast, maar de punten D zijn veranderlijk, zoodat de punten $\triangle_{12}$ en $\triangle_{34}$ de nevenhoekpunten van oneindig vele in C_4 beschreven vierhoeken zijn. Hetzelfde geldt voor een ander paar punten $\triangle$, zoodat we tot algemeene uitkomst verkrijgen:

«Elke twee overstaande hoekpunten der door de dubbelraaklijnen gevormde vierzijde zijn twee nevenhoekpunten van oneindig vele in C_4 beschreven vierhoeken.»

---

§ 8. De involutie I_3 op een kromme van de vierde orde met een drievoudig punt. (*)

Is op een C_4 met drievoudig punt O een cubische involutie I_3 gegeven, dan heeft die eene involutiekromme Γ van de klasse $k = (p - 1)(n - 1) = 6$. Dit blijkt ook daaruit dat aan het punt O zes punten zijn toegevoegd.

We willen laten zien dat uit twee drietallen der I_3 is af te leiden door welken bundel zij is ingesneden.

De drietallen A_1, A_2, A_3 en B_1, B_2, B_3 bepalen met het punt O twee kegelsnedenbundels $(O\,A_1\,A_2\,A_3)$ en $(O\,B_1\,B_2\,B_3)$ die op de C_4 twee quadratische involuties insnijden. Deze hebben steeds een paar P', P'' gemeenschappelijk.

De kegelsneden $(O\,A_1\,A_2\,A_3\,P'\,P'')$ en $(O\,B_1\,B_2\,B_3\,P'\,P'')$ bezitten nog een vierde gemeenschappelijk snijpunt Q dat buiten de kromme C_4 ligt. Hieruit zien wij dat de kegelsneden $(O\,P'\,P''\,Q\,A_1\,A_2\,A_3)$ en $(O\,P'\,P''\,Q\,B_1\,B_2\,B_3)$ een bundel $(O\,P'\,P''\,Q)$ bepalen die op C_4 de gegevene cubische involutie afteekent.

De ontaardingen uit den bundel wijzen aan dat er twee lineaire groepen der I_3 bestaan, zoodat Γ^6 twee drievoudige raaklijnen bezit, en bovendien volgens vroeger $\frac{1}{2}(p - 1)^2 (n - 2)(n - 3) = 4$ dubbelraaklijnen. Derhalve is het geslacht *nul* en de orde *tien*.

De kromme C_4^6 en Γ_{10}^6 hebben 36 gemeenschappelijke raaklijnen en 40 snijpunten die op de bekende manier te verklaren zijn.

Als bijzonder geval kunnen wij aannemen dat de I_3 een paar O', O'' bevat. Nu wordt de omhullende ontaard. Ze bestaat dan uit een kromme Γ^5 en het punt O. Wij zagen

---

(*) Jan de Vries: Verslag K. A. v. W. te Amsterdam; 1 Mei 1901.

vroeger dat eene I_3 door een drietal en twee paren kon bepaald worden. Wij kiezen daarvoor het drietal A_1, A_2, A_3 en de paren B_1, B_2 en O', O'', waardoor wij weder den bundel kunnen vinden die de bedoelde I_3 doet ontstaan. Leg de kegelsnede $A_1, A_2, A_3, O''', O'''$, dus rakende in O''' en let op het punt P dat zij op C_4 aangeeft. Dan de kegelsnede B_1, B_2, P, O''', O''' dus eveneens rakend in O'''. De beide kegelsneden leveren nog een snijpunt Q op buiten C_4. De vier punten $(O''' O''' P Q)$ bepalen een bundel die op de C_4 eene I_3 insnijdt en wel de gegevene.

Immers één exemplaar geeft het drietal A_1, A_2, A_3, een tweede geeft het paar B_1, B_2 en de ontaarde kegelsnede $(O''' P, O''' Q)$ wijst op een drietal dat het paar O', O'' bevat.

De lijn PQ draagt een drietal der I_3 en is dus drievoudige raaklijn der involutiekromme.

Verder blijkt gemakkelijk dat Γ^5 nog drie dubbelraaklijnen bezit en dus eene Γ^5_8 is van geslacht *nul*.

---

§ 9. Insnijdende bundels.

Wij willen in deze paragraaf eens nagaan hoe involuties op een gegeven rationale kromme C_n kunnen ontstaan.

Daartoe brengen we de kromme C_n in doorsnijding met een bundel krommen B_m van den graad *m*. Wij zien dadelijk, dat de snijpunten P van elk exemplaar B_m met de krommen C_n een puntengroep vormen, die door één punt P, onverschillig welk, bepaald is, want met elk punt P is een kromme van den bundel aangewezen. De ligging der basispunten is echter van invloed op de komende involutie.

De kromme C_n van het geslacht nul bezit ten hoogste $1/2\,(n - 1)(n - 2)$ dubbelpunten D. Wij stellen dit geval aanwezig. Dan bepalen $\{ 1/2\,(n - 3)\, n - 1 \} = 1/2\,(n^2 - 3n - 2)$ dubbelpunten D een bundel krommen (B_{n-3}) van den graad $(n - 3)$, terwijl er dan nog *twee* dubbelpunten D_1 en D_2 overblijven. Dit is de bundel van den hoogsten graad, dien wij door de dubbelpunten kunnen bepalen. Men

noemt de involuties door dergelijke bundels ingesneden wel *fundamentale* involuties, omdat zij met de kromme C_n gegeven zijn. Een exemplaar B_{n-3} heeft met de kromme C_n natuurlijk $n(n-3)$ snijpunten waarvan (n^2-3n-2) in de punten D terecht komen. Buiten deze punten D wordt de C_n derhalve door elk exemplaar van den bundel B_{n-3} in slechts twee punten F gesneden.

Wij zien zoo op de gegeven C_n een fundamentale involutie van den *tweeden graad* F_2 ontstaan, die met C_n bekend is. Deze involutie F_2 onderscheidt zich van de in het voorafgaande besprokene. Immers nemen we $D_1 \equiv P_1$ aan, dan snijdt de daardoor aangewezen kromme B_{n-3} de C_n voor de tweede maal weer in $D_1 \equiv P_2$. Derhalve zijn de dubbelpunten D_1 en D_2 paren der fundamentale involutie F_2 en dit is bijzonder, want in 't algemeen zullen geen twee toegevoegde punten van een I_2 in een dubbelpunt liggen. Elke quadratische involutie is door twee paren volkomen bepaald en onze F_2 dus ook. Zoo bepalen dan de punten D_1 en D_2 de bedoelde F_2. Maar elk ander paar punten D bepaalt een zekere fundamentale involutie F_2. Hieruit volgt dat het aantal mogelijke fundamentale involuties van den *tweeden* graad op een C_n overeenstemt met het aantal combinaties der punten D twee aan twee.

Passen we op deze F_2 de vroeger gevonden formules toe, door $p=2$ te stellen, dan vinden wij voor de grootheden, die op de involutiekromme Γ betrekking hebben

$$k' = (p-1)(n-1) = n-1,$$
$$\tau'_2 = 1/2\,(n-2)(n-3)(p-1)^2 = 1/2\,(n-2)(n-3),$$
$$\tau'_3 = 1/2\,(p-1)(p-2)(n-2) = 0,$$
$$n' = (p-1)(2n+p-6) = 2n-4 = 2(n-2),$$
$$g' = 1/2\,(p-2)(p-3) = 0.$$

In de eerste plaats ondergaat de *klasse* k' eene vermindering, want in D_1 en in D_2 ligt een paar der F_2. De punten D_1 en D_2 zijn twee klassepunten van Γ. De eigenlijke omhullende heeft nu de klasse $k' = n-1-2 = n-3$.

Uit deze formule blijkt dat we eerst voor $n=5$, dus op

een kromme van den vijfden graad, fundamentale involuties van de tweede orde ontmoeten. De involutiekromme Γ is dan een kegelsnede.

De C_n en Γ van de klasse $k = 2(n-1)$ en $k' = n-3$ zijnde moeten $2(n-1)(n-3)$ gemeenschappelijke raaklijnen bezitten. Zij ontstaan

1⁰. Uit de twee dubbelpunten der I_2;

2⁰. Uit de coïncidenties der verwantschap (S, S'); de snijpunten der lijnen $P_1 P_2$ met de C_n zijn punten S; de (S, S') bezit het symbool $[(n-4)(n-3)]$ met dubbel zooveel coïncidenties.

3⁰. Uit de coïncidenties der overeenkomst (P, S) die voor te stellen is door $[(n-2), 2(n-4)]$; dus $(n-2) + 2(n-4) = 3n - 10$ gevallen $P \equiv S$. De kromme C_n en Γ zullen elkaar in $P \equiv S$ aanraken. We moeten derhalve $(6n - 20)$ gemeenschappelijke raaklijnen rekenen.

Deze drie gevallen leveren nu

$$2 + 2(n-3)(n-4) + 2(3n-10) = 2(n-1)(n-3)$$

gemeenschappelijke raaklijnen, waarmee zij allen verantwoord zijn.

Omdat Γ van het geslacht nul is, zal men voor het aantal dubbelraaklijnen vinden

$$\tau'_2 = 1/2\,(k'-1)(k'-2) = 1/2\,(n-4)(n-5)$$

waaruit voor den graad van Γ is af te leiden

$$n' = 2(k'-1) = 2(n-4).$$

De onderstelling $n = 5$ levert dan dat Γ een kegelsnede zal wezen.

Zoekt men het aantal τ'_2 door het aantal paren te bepalen dat het stelsel (S, S') met de I_2 gemeen heeft, dan vindt men te veel, want dit aantal is $(n-4)(n-3)$ en daaruit zou volgen

$$\tau'_2 = 1/2\,(n-3)(n-4)$$

dus voor $n = 5$ wordt $\tau'_2 = 1$, wat niet waar is.

Maar uit D_1 gaan naar Γ^{n-3} $(n-3)$ raaklijnen. Een draagt

het paar D'_1, D''_1, de andere elk een paar $P_1 P_2$. Op elk dezer $(n - 4)$ raaklijnen is D'_1, D''_1 een paar $(S_1 S')$. Van het aantal paren dat $(S_1 S')$ met I_2 gemeen heeft, liggen er dus $2(n - 4)$ in D_1 en D_2. Deze paren leveren geen dubbelraaklijnen, zoodat wij nu voor het aantal dubbelraaklijnen vinden

$$\tau'_2 = 1/2\,(n - 4)\,n - 5)$$

De dubbelpunten der C_n bepalen een bundel hoogstens van den graad $(n - 3)$, waardoor eene Γ_2 ontstaat. Bepalen wij bundels door minder dubbelpunten, dan ontstaan fundamentale involuties van hoogeren graad.

Zoo bepalen $1/2\,(n^2 - 5\,n + 2)$ punten D een bundel (B_{n-4}) van graad $(n - 4)$, waarvan de exemplaren op de kromme C_n eene involutie F_{n-2} doen ontstaan.

Minstens moet weder $n = 5$ zijn; we krijgen dan een F_3, ingesneden door een bundel van den eersten graad bepaald door één basispunt D. Dit zijn de fundamentale cubische involuties die door de waaiers met middelpunten D worden ingesneden. Zoo zijn er natuurlijk zes.

Het aantal ongebruikte dubbelpunten is steeds $1/2\,(n - 1)(n - 2) - 1/2\,(n^2 - 5\,n + 2) = n$. Die n punten D zijn paren der F_{n-2} en weder n klassepunten der omhullende Γ. We vinden daaruit voor de klasse k' der involutiekromme

$$k' = (p - 1)(n - 1) - n = (n - 3)(n - 1) - n$$
$$= n^2 - 5\,n + 3.$$

Verder zullen wij dit onderzoek echter niet voort zetten. Alleen nog de opmerking, dat op een C_n met het maximum aantal dubbelpunten $1/2\,(n - 1)(n - 2)$ centrale fundamentale involuties F_{n-2} aanwezig zijn. Blijkbaar liggen $[1/2\,(n - 1)(n - 2) - 1] = 1/2\,(n^2 - 3\,n) = \frac{n}{2}(n - 3)$ paren der F_{n-2} in de dubbelpunten D, zoodat de omhullende Γ zal worden samengesteld uit de $\frac{n}{2}(n - 3)$ punten D en het middelpunt D van den waaier, dat voor $\frac{(n-3)(n-2)}{1.2.}$ punten moet ge-

teld worden, omdat in het algemeen de klasse van Γ zou zijn $(n - 3)(n - 1)$.

Ten slotte is het geval denkbaar, dat er onder de singuliere punten der C_n veelvoudige punten voorkomen. Ook dan zijn fundamentale involuties mogelijk. De gegevens worden nu echter te onbepaald om er verder iets over te zeggen.

§ 10. Een tweede manier om involuties te verkrijgen, leveren de bundels waarvan de basispunten zoo zijn gekozen dat alle dubbelpunten D er toe behooren. De dubbelpunten bepalen op zichzelf geen bundel. Er moeten nog eenige punten naar willekeur bij genomen worden; 't zij òp, 't zij buiten de gegeven kromme C_n. De bundel van den laagsten graad, die aan genoemde voorwaarde voldoet, is een (B_{n-2}) van graad $(n - 2)$. Het aantal bepalende punten is

$$[{}^1/_2 (n - 2)(n + 1) - 1] = {}^1/_2 (n^2 - n - 4).$$

Er zijn ${}^1/_2 (n - 1)(n - 2)$ punten D. We moeten dus nog ${}^1/_2 (n^2 - n - 4) - {}^1/_2 (n^2 - 3n + 2) = n - 3$ punten B bij de dubbelpunten kiezen om een bundel (B_{n-2}) te bepalen.

Het is duidelijk, dat nu geen paren der involutie in de dubbelpunten der C_n kunnen terecht komen. Dergelijke bundels leveren ons het meest algemeene geval. Op deze wijs moeten we de involutie I_p ontstaan denken die wij in de eerste paragraaf van dit hoofdstuk bespraken. Alleen voor deze involuties gelden de aldaar gevonden formules.

Worden alle $(n - 3)$ punten B buiten de C_n aangenomen dan ontstaat eene involutie I_{n-2}. Want een exemplaar B_{n-2} geeft $n(n - 2)$ snijpunt met de C_n, terwijl er $(n - 1)(n - 2)$ in de dubbelpunten D liggen. Het overschietende aantal

$$(n^2 - 2n) - (n^2 - 3n + 2) = n - 2$$

geeft den graad der komende involutie aan.

Men ziet oogenblikkelijk dat, wegens de vrijheid, die bestaat in het aannemen der $(n - 3)$ punten B, mits zij slechts buiten de C_n liggen, het aantal der involuties I_{n-2} zeer groot is. Verder kan men, door telkens één der veranderlijke

lijke punten B òp de C_n te kiezen, den graad der involutie verlagen tot twee. Men heeft dan $(n - 4)$ punten B op C_n te nemen.

Door kundels van den *graad* $(n - 2)$ worden dus involuties I_p aangewezen van $p = 2, \ldots\ldots$ tot $p = (n - 2)$.

Verder gaande bepalen we een bundel (B_{n-1}) van den graad $(n - 1)$ door $[1/2\,(n - 1)(n + 2) - 1] = 1/2\,(n^2 + n - 2)$ punten, waaronder de dubbelpunten D der C_n begrepen zijn. Er blijven $1/2\,(n^2 + n - 4) - 1/2\,(n^2 - 3n + 2) = 2n - 3$ veranderlijke basispunten B over, die mede òp of bùiten de C_n kunnen gekozen worden. In het eerste geval heeft elk exemplaar B_{n-1} met de kromme C_n gemeen $n(n - 1) - (n^2 - 3n + 2) = 2n - 2 = 2(n - 1)$ snijpunten P. Er ontstaat dus eene $I_{2(n-1)}$.

Telkens punten B òp de C_n nemende, kunnen wij ook met deze bundels ten slotte eene quadratische involutie insnijden.

Door bundels van den *graad* $(n - 1)$ worden involuties I_p ingesneden van $p = 2$ tot...... $p = 2(n - 1)$.

Wij kunnen op deze manier involuties van iederen graad op onbepaald veel wijzen verkrijgen.

Het bestaan van veelvoudige punten tegelijk met dubbelpunten D is weder op verschillende wijzen denkbaar; maar die gevallen zijn te onbepaald om voor eenige behandeling vatbaar te zijn.

§ 11. Een derde manier om involuties te doen ontstaan bestaat hierin, dat we *alle* basispunten B *buiten* de kromme C_n plaatsen.

Het eenvoudigste geval is dan dat we slechts één basispunt B aannemen. De daardoor bepaalde waaier B zal blijkbaar eene centrale involutie involutie I_n doen ontstaan. Terwijl een I_n in 't algemeen eene involutiekromme Γ van klasse $k' = (n - 1)^2$ heeft, zal Γ hier ontaard zijn in het centrum B, dat $\frac{n(n-1)}{2}$ maal geteld moet worden en de $\frac{(n-1)(n-2)}{1.2.}$ dubbelpunten D van kromme C_n.

Het volgend geval is dat wij een bundel kegelsneden (B_2) hebben met de vier basispunten buiten de C_n. Er ontstaat eene I_{2n} waarvan in alle punten D paren liggen.

Op deze wijs voortgaande, zien wij dat een bundel (B_m) op de gegevən kromme eene involutie I_p van den graad $p = m\,n$ zal aangeven. De graad p is steeds een veelvoud van het getal n.

Onderstellen wij verder dat er basispunten op de C_n komen, mits buiten de dubbelpunten D, dan geeft een waaier met centrum B op de C_n eene involutie I_{n-1}. In 't algemeen snijden dan bundels (B_m) involuties van den graad $(m\,n - 1)$ .... tot den graad $(m\,n - b)$ in, als b het aantal basispunten voorstelt. Men krijgt weder involuties van iederen graad. Nog op andere wijzen kunnen involuties ontstaan. Wij zullen die echter niet beschouwen.

De gegeven manieren met elkaar vergelijkende kunnen wij de opmerking maken, dat men wel volgens die verschillende methoden involuties van den *zelfden graad* zou kunnen verkrijgen maar dat zij toch nooit identiek kunnen zijn. Immers, is eene involutie I_p ontstaan volgens de eerste manier dan is het eene fundamentale involutie; er liggen dan een *bepaald aantal* paren in *de dubbelpunten* D. Ontstaat een I_p volgens de tweede wijze dan zijn er *in 't geheel geen* paren in de dubbelpunten D gelegen.

Volgens de derde manier is het duidelijk dat *alle dubbelpunten* D paren der komende I_p zullen voorstellen.

Wegens het verschillend aantal in de punten D gelegen paren der I_p is zoodoende het insnijden eener zelfde involutie volgens de besprokene handelwijzen eene onmogelijkheid.

---

§ 12. FUNDAMENTALE INVOLUTIES OP RATIONALE KROMMEN VAN DEN VIJFDEN GRAAD. (*)

We spraken reeds in 't algemeen over fundamentale involuties op rationale krommen, maar willen nu de bijzonder-

---

*) JAN DE VRIES, Versl. K. A. v. W., Amsterdam, 10 Februari 1904.

heden nagaan, die zijn op te merken, wanneer een C_5 met zes dubbelpunten D_k ($k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) de draagster der involutie is.

Klaarblijkelijk snijdt een bundel kegelsneden door vier punten D een fundamentale $F_2^{5,6}$ in, waarvan twee paren in D_5 en in D_6 liggen. Derhalve is de klasse der involutiekromme ϕ met twee te verminderen en dus niet $(p - 1)(n - 1) = 4$, maar $k' = 2$; m. a. w. de omhullende wordt een kegelsnede $\phi_2^{5,6}$.

Letten wij op de verwantschap (S, S') tusschen de punten S, ingesneden door de verbindingslijnen P_1, P_2, dan blijkt, dat de punten S in dit geval een cubische involutie $F_3^{5,6}$ vormen, want uit $S_1 \equiv P_1$ gaan slechts twee raaklijnen n.l. $P_1 P_2 S' S'' S'''$ en $S_1 S_2 Q_1 Q_2 S_3$. De verwantschap (P, S) is hier eene $(2, 3)$ met vijf coïncidenties $P \equiv S$, waaruit volgt dat de omhullende $\phi_2^{5,6}$ eene vijfmaal rakende kegelsnede van C_5 is. Blijkbaar is $\phi_2^{5,6}$ omhullende zoowel voor $F_2^{5,6}$ als voor de $F_3^{5,6}$.

Deze vijf raakpunten leveren 10 gemeenschappelijke raaklijnen. De $F_2^{5,6}$ en $F_3^{5,6}$ hebben samen zes coïncidenties waarmee de overige zes gemeenschappelijke raaklijnen van C_5^8 en $\phi_{5,6}^2$ verklaard worden.

Een drietal der $F_3^{5,6}$ bepaalt met de zes dubbelpunten D_k eene cubische kromme; dus door twee drietallen wordt een bundel van cubische krommen vastgelegd, welke de $F_3^{5,6}$ doet ontstaan. In de punten D_5 en D_6 liggen twee paren der F_2, maar ook twee paren van F_3, want zoowel uit D_5 als uit D_6 gaat één raaklijn aan $\phi_{5,6}^2$ van de soort $Q_1 Q_2 S_1 D'_5 \equiv D''_5$. De C_3, die het paar van F^3 insnijdt, dat in D_5 ligt, moet noodzakelijk daar ter plaatse een dubbelpunt bezitten, zoodat zij met de overige krommen van den bundel in D_5 twee punten gemeen heeft. Er liggen dus twee basispunten in D_5, wat tengevolge zal hebben, dat alle overige krommen elkaar in D_5 aanraken. Maar dan doen zij het eveneens in D_6. Uit D_5 gaat een rechte t_5 waarop een drietal der $F_3^{5,6}$ ligt; t_5 bepaalt met de vijf overige dubbelpunten D eene ontaarde C_3, bestaande uit de rechte t_5 en de kegelsnede $k^2_{1, 2, 3, 4, 6}$. Evenzoo levert D_6 de ontaarde C_3

gevormd door t_6 en de kegelsnede $k^2_{1,2,3,4,5}$. Deze twee ontaarde krommen bepalen natuurlijk ook de negen basispunten van den cubischen bundel. Er liggen er vier in $D_1 D_2 D_3 D_4$, twee in D_5 en twee in D_6, derhalve is het snijpunt van t_5 en t_6 het negende basispunt.

Bovendien moeten de beide ontaardingen elkaar raken in D_5, maar ook in D_6. Dit kan alleen als de rechte t_6 de kegelsnede $k^2_{1 2 3 4 6}$ raakt; en als de lijn t_5 dan de kegelsnede $k^2_{1 2 3 4 5}$ raakt, want de beide kegelsneden kunnen niet meer dan de punten D_1, D_2, D_3, D_4 gemeen hebben. Alle krommen van den bundel raken derhalve in D_5 aan t_5 en in D_6 aan t_6.

De fundamentale involuties $F^{4,6}_2$ en $F^{5,6}_2$ met de toegevoegde involuties $F^{4,6}_3$ en $F^{5,6}_3$ hebben de involutiekegelsneden $\Phi^2_{4 6}$ en $\Phi^2_{5 6}$. Deze hebben vier gemeenschappelijke raaklijnen.

Hoe worden die verklaard? Daartoe letten we op de gemeenschappelijke paren van $F^{4,6}_2$ en $F^{5,6}_3$.

Eene I_p en een I_q hebben steeds $(p - 1)(q - 1)$ paren gemeen waaruit blijkt dat de $F^{4,6}_2$ en de $F^{5,6}_3$ twee paren gemeen hebben. Maar één paar wordt door het dubbelpunt D_6 geleverd. Het andere noemen we $P^1_{4 6} P^2_{4 6}$ of $S^1_{5 6} S^2_{5 6}$. De verbindingslijn r dezer punten snijdt nog in drie punten, die wij $S^1_{4 6} S^2_{4 6} S^3_{4 6}$ maar ook $S^3_{5 6} P^1_{5 6} P^2_{5 6}$ mogen noemen. Derhalve ligt op r ook een gemeenschappelijk paar van $F^{5,6}_2$ en $F^{4,6}_3$.

De vier gemeenschappelijke raaklijnen van $\Phi^2_{4 6}$ en $\Phi^2_{5 6}$ worden dus verklaard als volgt:

De cubische involuties $F^{4,6}_3$ en $F^{5,6}_3$ hebben vier paren gemeen, die drie gemeenschappelijke raaklijnen geven, want één dier paren is het dubbelpunt D_6, en de lijn r is de vierde gemeenschappelijke raaklijn.

De vier dubbelpunten D_1, D_2, D_3, D_4 bepalen drie ontaarde kegelsneden, die drie paren $P_1, P_2, Q_1, Q_2, R_1, R_2$ der $F^{5,6}_2$ insnijden. Blijkbaar bepalen de drie lijnen P_1, P_2, Q_1, Q_2 en R_1, R_2 met de boven genoemde rechten t_5 en t_6 een vijfmaal rakende kegelsnede $\Phi^2_{5 6}$.

Natuurlijk zijn er $\frac{6 \times 5}{1 \times 2} = 15$ fundamentale involuties $F^{k\,l}_2$, $F^{k\,l}_3$ en zes centrale kubische involuties. Deze laatste worden ingesneden door de waaiers met centra D_k. Hunne omhullende, in 't algemeen bij een I_3 van de klasse $(p-1)(n-1)=8$, ontaardt in het driemaal te tellen centrum en de vijf overschietende punten D.

---

§ 13. OVER STELSELS VAN KEGELSNEDEN DIE BIJ INVOLUTIES OP RATIONALE KROMMEN BEHOOREN. (*)

Bij stelsels van kegelsneden in een vlak beteekent μ het aantal kegelsneden door een punt, ν het aantal dat een rechte aanraakt, δ het aantal lijnenparen, η het aantal dubbelrechten (puntenparen). Tusschen deze vier kenmerkende getallen bestaan twee betrekkingen, die men als volgt kan vinden. Beschouw de willekeurige lijn l. Door elk punt M van l gaan μ kegelsneden, die op l μ punten M′ aanwijzen. De punten M en M′ vormen een stelsel (μ, μ) met $2\,\mu$ coïncidenties, welke ontstaan uit de ν kegelsneden, die l raken, en de η dubbelrechten, die l snijden; dus is

$$2\,\mu = \nu + \eta.$$

Neem verder een willekeurig punt O als centrum van een waaier. Aan elken straal s uit O raken ν kegelsneden; zij bepalen nog ν raaklijnen s' uit O. De overeenkomst (S, S′) heeft tot symbool (ν, ν) en $2\,\nu$ coïncidenties, die ontstaan uit de μ kegelsneden door 't middelpunt O en de δ lijnenparen; want de straal uit O naar het snijpunt van een lijnenpaar δ is een geval $S \equiv S'$. Nu geldt derhalve de formule

$$2\,\nu = \mu + \delta.$$

Op de rationale kromme C_n zij gegeven een I_p zoodat $p \geqq 5$. De p punten eener groep combineeren wij vijf aan vijf en letten op de kegelsneden door vijf dezer punten

---

(*) JAN DE VRIES. Verslag K. A. v. W. te Amsterdam, 10 Febr. 1904.

bepaald. Zij vormen een stelsel $[C^2]$. Wij hebben geen dubbelrecht dus is $\eta = 0$ en wij vinden

$$\left\{\begin{array}{l} 2\mu = \nu \\ 2\nu = \mu + \delta \end{array}\right. \text{ of } \left\{\begin{array}{l} 2\mu = \nu \\ 3\mu = \delta \end{array}\right.$$

Liggen drie toegevoegde punten $P\,P'\,P''$ op één rechte dan hebben wij een drievoudige raaklijn der omhullende. Hun aantal is

$$\tau'_3 = 1/2\,(p-1)(p-2)(n-2).$$

Elke lijn $P\,P'\,P''$ vormt met een andere lijn die twee tot dezelfde groep behoorende punten P verbindt een lijnenpaar van $[C^2]$ dus is

$$\delta = \tau'_3 \times \frac{(p-3)(p-4)}{1.\ 2.} = 1/4\,(p-1)(p-2)(p-3)(p-4)(n-2)$$

waaruit

$$\mu = 1/12\,(p-1)(p-2)(p-3)(p-4)(n-2)$$
$$\nu = 1/6\,(p-1)(p-2)(p-3)(p-4)(n-2)$$

of

$$\mu = 2\,(n-2)(p-1)_4$$
$$\nu = 4\,(n-2)(p-1)_4.$$

Een kegelsnede van $[C^2]$ bevat vijf punten P en $(2n-5)$ punt X. Door een punt P der C_n gaan μ kegelsneden, waaronder $(p-1)_4$ die P met vier toegevoegde punten P' verbinden. Er schieten $\mu-(p-1)_4 = (2n-5)(p-1)_4$ kegelsneden over, die vijf punten Q der I_p bevatten en $(2n-6)$ punten X'; de verwantschap (X, X') heeft 't symbool $[(2n-6)\ (2n-5)(p-1)_4]$

De $2(2n-6)(2n-5)(p-1)_4$ coïncidenties $X \equiv X'$ wijzen op evenveel kegelsneden, die de C_n in $X \equiv X'$ aanraken.

De $2\,(p-1)$ dubbelpunten der I_p leveren

$$2\,(p-1)\frac{(p-2)(p-3)(p-4)}{1.\ 2.\ 3.} = 2\,(p-1)\,p-2)_3 = 8\,(p-1)_4$$

andere kegelsneden die C_n raken. Ten slotte zal wanneer

$P \equiv X$ wordt de bijbehoorende kegelsnede de C_n in $P \equiv X$ raken en voor twee moeten geteld worden.

Het stelsel (P, X) heeft de formule

$$[5 (2n - 5)(p - 1)_4, (2n - 5)(p - 1)_4]$$

zoodat er $6 (2n - 5)(p - 1)_4$ kegelsneden zijn die C_n raken en alle als dubbele exemplaren moeten beschouwd worden.

Het totale aantal rakende kegelsneden uit het stelsel $[C^2]$ is nu $4 (n - 2)(2n - 1)(p - 1)_4$.

De verwantschap tusschen de punten X die met vijf punten $P_0' P_0'' P_0''' P_0'''' P_0^V$, op een zelfde kegelsnede liggen en de overige $(p - 5)$ punten P_0 is van den vorm

$$[(2n - 5)(p - 1)_4 (p - 5), (p - 1)_5 (2n - 5)].$$

Zoodra $P_0 \equiv X$ wordt, liggen zes punten P_0 op één C^2. Maar ieder dier zes punten is dan als eene coïncidentie op te vatten, derhalve is het aantal kegelsneden dat 6 toegevoegde punten bevat $(2n - 5)(p - 1)_5$.

§ 14. Is $p < 5$ dan nemen wij $(5 - p)$ willekeurige punten A_k $k = 1 \ldots (5 - p)$ aan, en leggen kegelsneden door die vaste punten A_k en de groepen der I_p. Om van ons stelsel $[C^2]$ μ te bepalen leggen wij de kegelsneden door de punten A_k en een willekeurig punt A_0. Zij doen op de C_n een I^{p-1}_{2n} ontstaan, die met de I_p $(2n - p + 1)$ groepen van p punten gemeen heeft. Door A_0 gaan dus $(2n - p + 1)$ kegelsneden, die een groep der I_p bevatten en men heeft $\mu = 2n - p + 1$; $\nu = 2(2n - p + 1)$; $\delta = 3(2n - p + 1)$. Is $p = 2$ dan zijn er drie vaste punten A_1, A_2, A_3 aan te nemen, en is $\delta = 3(2n - 1)$.

Dit blijkt ook zoo: de lijn $A_1 A_2$ snijdt C_n bijv. in een punt P; verbindt men nu A_3 met 't aan P toegevoegde punt P', dan heeft men één lijnenpaar van $[C^2]$. In 't geheel vindt men $3n$ van deze paren. Uit een punt A_1 gaan $(n - 1)$ lijnen die een paar P, P' der I_2 dragen. Elk dezer rechten vormt met de lijn $A_2 A_3$ een lijnenpaar. Van deze vindt men er $3(n - 1)$. Totaal is dus $\delta = 3(2n - 1)$. Hebben wij een I_3, dus $p = 3$, dan moeten wij *twee punten* A_1 A_2

er bij kiezen. Dan wordt $\delta = 6(n-1)$. Deze lijnenparen vindt men als volgt: Vooreerst zijn er $(n-2)$ collineaire drietallen $P P' P''$ die elk met de lijn $A_1 A_2$ een lijnenpaar vormen. Snijdt verder de lijn $A_1 A_2$ de C_n in een punt P dan vormt de lijn $P' P''$ met de lijn $A_1 A_2$ een lijnenpaar. Zoo zijn er *n*. Ten slotte is elk der punten A_1, A_2 collineair met $2(n-1)$ paren der I_3. Alles te zamen nemende vindt men $\delta = 6(n-1)$.

Bij een I_4 is $p=4$ en heeft men maar één punt A_1 noodig. Dan is $\delta = 3(2n-3)$. Want er zijn $3(n-2)$ collineaire drietallen en $3(n-1)$ lijnenparen, waarvan elke der rechten twee toegevoegde punten der I_4 draagt.

De verwantschap (X, X') heeft voor $p < 5$ het kenmerkende getal $(2n-p)(2n-p-1)$; de verwantschap (P, X) het symbool $[p(2n-p), (2n-p)]$. Nog bedenkende dat I_p $2(p-1)$ dubbelpunten heeft, vindt men nu voor het aantal C^2, die C_n aanraken, $2(2n-p)(2n-p-1) + 2(2n-p)(p+1) + 2(p-1) = 2(2n-1)(2n-p+1)$. Voor een I_2 is (X, X') eene $[2n-2](2n-3)$ die met I_2 $(2n-2)(2n-3)$ paren gemeen heeft. Dan zijn er dus $(n-1)(2n-3)$ kegelsneden die twee paren der I_2 dragen.

HOOFDSTUK IV.

§ 1. INVOLUTIES OP RATIONALE RUIMTEKROMMEN.

De axiale I_n. (Haar ontstaan).

Deze soort van involutie is bij de rationale ruimtekrommen van bijzonder belang. Wij stellen ons voor dat een rationale ruimtekromme van den n^{en} graad R_n gegeven is en dat wij een rechte a willekeurig in de ruimte aannemen, welke rechte wij in 't vervolg de *as* a zullen noemen. En wel omdat wij de rechte a als *as* van een vlakkenbundel zullen opvatten. Deze door de as a bepaalde vlakkenbundel snijdt de gegeven R_n volgens de groepen eener involutie I_n. Immers, in elk element van den vlakkenbundel a verschijnen n snijpunten P met de R_n, terwijl elk zoo'n punt P, onverschillig welk, met de as a een vlak van den bundel bepaalt en dus de geheele groep van n punten P bepaalt. De volgens deze manier voortgebrachte involutie is bijzonder

1°. Omdat alle punten van één groep in één vlak liggen;

2°. Omdat al die vlakken een vlakkenbundel vormen;

3°. Omdat de graad van zoo'n involutie overeen moet stemmen met den graad van de ruimtekromme waarop zij geplaatst wordt.

Een dergelijk puntenstelsel wordt nu eene «axiale» involutie van den n^{en} graad genoemd.

---

§ 2. HET REGELVLAK ($P_1 P_2$).

De n toegevoegde punten P eener groep der axiale I_n laten zich 2 aan 2 verbinden door lijnen $P_1 P_2$, welke rechten

alle in een zeker vlak der vlakkenbundel *a* zijn gelegen en daarom noodzakelijk de as *a* van dien vlakkenbundel moeten snijden. Stelt men zich voor dat op de aangegeven manier alle toegevoegde punten door rechte lijnen zijn verbonden, dan vormen die rechten een regelvlak, dat ik zal noemen het regelvlak ($P_1 P_2$) of 't regelvlak ρ.

De *graad* n' van het regelvlak ρ laat zich eenvoudig bepalen. Volgens bepaling wordt de graad van een regelvlak aangewezen door het aantal beschrijvende lijnen, die een willekeurige rechte lijn l snijden.

Kiezen wij dan een geheel willekeurige lijn l in de ruimte en maken haar tot as van een vlakkenbundel. Deze vlakkenbundel l doet op de gegeven kromme R_n een 2e axiale I_n ontstaan. Het aantal gemeenschappelijke paren der beide collocale axiale involuties van den nen graad is $(n - 1)^2$. Wordt met G_1, G_2 zoo'n gemeenschappelijk paar bedoeld, dan ontmoet de lijn $G_1 G_2$ de lijn l, en deze wordt derhalve door $(n - 1)^2$ beschrijvende lijnen van ρ gesneden; dus is

$$n' = (n - 1)^2.$$

Uit het bovenstaande volgt de *stelling:* «twee willekeurig in de ruimte aangenomen rechten p en q worden door $(n - 1)^2$ bisecanten eene rationeele ruimtekromme R_n gesneden.

Beschouw slechts de lijn p als as van eenen vlakkenbundel, die op de gegeven R_n eene axiale I_n insnijdt.

Het regelvlak ρ van deze I_n is van graad $(n - 1)^2$ en bezit derhalve $(n - 1)^2$ rechten, die de lijn q snijden, maar die ook p snijden, want p ligt op het regelvlak ρ. De bedoelde lijnen zijn alle bisecanten, want zij verbinden twee punten van R_n.

Een punt P_1 der ruimtekromme R_n bepaalt een groep van n toegevoegde punten der I_n. Door P_1 gaan de lijnen $P_1 P_2$, $P_1 P_3$, ... $P_1 P_n$ van het regelvlak ρ. Elk punt der oorspronkelijke kromme R_n draagt alzoo $(n - 1)$ rechten van ρ en de geheele kromme R_n is een $(n - 1)$-voudige lijn op het regelvlak ρ.

De vlakkenschoof door het willekeurige punt A der ruimte

(d. w. z, alle vlakken door A) snijdt de R_n volgens de groepen eener I_n^2, want twee punten Q_1 en Q_2 bepalen met 't punt A een exemplaar van de schoof en tegelijk een n-puntige groep der involutie. De verkregen I_n^2 bezit $\frac{(n-1)(n-2)}{1.2.}$ neutrale elementenparen, d. w. z. paren die geen groep van n punten bepalen wat 't geval is wanneer de lijn die zoo'n puntenpaar $N_1 N_2$ verbindt door A loopt.

Ik zie daaruit dat door elk willekeurig punt der ruimte $\frac{(n-1)(n-2)}{1.2.}$ bisecanten gaan. Ook uit elk punt der as a gaan zooveel bisecanten en daar deze nu alle beschrijvende rechten van 't regelvlak ρ zijn is de as a op dat regelvlak een $\frac{(n-1)(n-2)}{1.2.}$ voudige lijn.

Blijkt ook zoo: In elk vlak door a liggen $1/2\, n(n-1)$ rechten $P_1 P_2$. Daar $n' = (n-1)^2$ volgt dat a een $1/2\,(n-1)(n-2)$-voudige lijn is.

§ 3. In elk vlak van den vlakkenbundel (a) ligt een groep van n toegevoegde punten P der axiale I_n. We verbinden van zoo'n groep de punten P_1, P_2 en ook de punten P_3, P_4; de rechten $P_1 P_2$ en $P_3 P_4$ zijn lijnen van het regelvlak ρ. Hun snijpunt Q ligt op een dubbelkromme van ρ. Er gaan immers twee beschrijvende lijnen van ρ door het punt Q. Beschouw ik nu een vlak α van den vlakken bundel (a) met de n punten P der involutie er in, dan kan ik op de aangegeven manier meerdere punten Q in 't vlak (α) doen ontstaan. Ter bepaling van het in vlak α gelegen aantal punten Q kan men als volgt redeneeren:

De n in vlak α gelegen punten P geven $\frac{n(n-1)}{1.2.}$ ververbindingsrechten $P_1 P_2$, die $1/2 \left\{\frac{n(n-1)}{1.2.}\right\} \left\{\frac{n(n-1)}{1.2.} - 1\right\}$ snijpunten vertoonen. Hiervan moeten de n punten P, die elk $\frac{(n-1)(n-2)}{1.2.}$ snijpunten vertegenwoordigen afgetrokken

worden. De overblijvende snijpunten zijn dan alle punten Q.

Hun aantal is derhalve

$$\frac{n(n-1)[n(n-1)-2]}{2 \times 2 \times 2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{2} =$$

$$= \frac{n(n-1)(n^2-5n+6)}{2 \times 2 \times 2} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8}$$

Hiermee is nog niet het totale aantal punten Q gevonden dat in vlak α is te vinden, want de mogelijkheid bestaat dat een punt Q op de as a terecht komt; wij moeten het aantal op de as a gelegen punten Q bepalen en die bij het reeds gevonden aantal optellen waarna wij den graad van Q gevonden hebben.

De lijn $P_1 P_2$ snijdt de as a in een punt, dat ik R zal noemen. Nu wordt de lijn $P_1 P_2$ door $\left\{\frac{n(n-1)}{1.2} - 1\right\}$ rechten gesneden die toegevoegde punten in vlak α verbinden. Door P_1 gaan er $(n-2)$ en evenveel gaan er door P_2. Buiten P_1 en P_2 wordt de lijn $P_1 P_2$ dus door $\left[\frac{n(n-1)}{1.2} - 1\right] - \left[2n - 4\right]$ rechten gesneden of $[{}^1\!/\!_2\, n(n-1) - 2n + 3] = \frac{(n-2)(n-3)}{1.2}$ rechten, die ik q zal noemen, want ik kan ook zeggen, op de lijn $P_1 P_2$ zijn te vinden $\frac{(n-2)(n-3)}{1.2}$ punten Q die elk nog een lijn q van het regelvlak bepalen. De snijpunten van deze lijn q met de as a voeg ik toe aan het genoemde punt R en noem ze punten R'. In het vlak α zijn aan het punt R blijkbaar toegevoegd $\frac{(n-2)(n-3)}{1.2}$ punten R'. Doch door R gaan $\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}$ bisecanten, waaronder ook de lijn $R P_1 P_2$. Elke bisecante voegt aan het punt R evenveel punten R' toe, zoodat de verwantschap (R, R'), die klaarblijkelijk symmetrisch is, tot kenmerkend getal heeft:

$$\frac{(n-1)(n-2)^2(n-3)}{4}$$

Ze bezit tweemaal zooveel dubbelpunten $R \equiv R'$. Is echter $R \equiv R'$, dan liggen twee bisecanten met a in één vlak en is dat dubbelpunt $R \equiv R'$ tevens een op a gelegen punt Q geworden. Bovendien blijkt dat zoo'n coïncidentie *dubbel* geteld moet worden.

Het aantal op de as a gelegen punten Q is dus

$$\frac{(n-1)(n-2)^2(n-3)}{4}$$

waardoor ten slotte voor den graad van de dubbelkromme (Q) wordt gevonden

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8} + \frac{(n-1)(n-2)^2(n-3)}{4} =$$

$$= \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n+2n-4)}{8} =$$

$$= \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(3n-4)}{8}$$

---

§ 4. Het trisecanten oppervlak.

We kiezen een willekeurig punt A òp de gegeven kromme R_n. De vlakken schoof door dat punt A, bepaalt op de ruimtekromme eene involutie I^2_{n-1}, die $\frac{(n-2)(n-3)}{1.2.}$ neutrale puntenparen bezit.

De verbindingslijn van zoo'n neutraalpaar N_1, N_2 loopt door het punt A der ruimtekromme en is blijkbaar een *trisecante*. We zien hieruit dat door elk willekeurig punt der ruimtekromme R_n gaan $\frac{(n-2)(n-3)}{1.2.}$ trisecanten, waardoor ik aan een punt A van R_n kan toevoegen $(n-2)(n-3)$ punten N.

De verwantschap tusschen de punten A en N is symmetisch en heeft tot kenmerkend getal $[(n-2)(n-3)]$. De verwantschap (A, N) zal tegelijk met de axiale involutie I_n op de ruimtekromme R_n bestaan en met I_n gemeen hebben $(n-1)(n-2)(n-3)$ elementenparen. Stelt G_1, G_2 een paar

voor dat tot de (A, N) èn tot de I_n behoort, dan gaat de lijn $G_1 G_2$ door A en zal bovendien de as *a* der axiale involutie snijden.. Maar in dat geval zullen de drie punten A, G_1 en G_2 toegevoegde punten der I_n voorstellen, en zij vormen *drie* paren der axiale I_n die in 't algemeen drie verbindingsrechten bezitten. Deze drie lijnen zijn hier samengevallen vormende de lijn $A G_1 G_2$, waaruit blijkt dat elke trisecante die de as *a* snijdt voor drie koorden geldt. Het aantal trisecanten dat op *a* rust of de *graad* van het trisecantenregelvlak is nu klaarblijkelijk

$$1/3\,(n - 1)\,(n - 2)\,(n - 3).$$

Alle trisecanten die *a* snijden behooren tot de doorsnede van ρ met 't trisecantenoppervlak.

---

§ 5. DE VLAKKE DOORSNEDE VAN HET REGELVLAK ($P_1 P_2$).

Een willekeurig plat vlak φ snijdt het regelvlak ρ volgens eene vlakke kromme van den graad $(n - 1)^2$, die de volgende bijzonderheden aanbiedt:

1°. Zij vertoont een $\frac{(n-1)(n-2)}{1 \times 2}$-voudig punt ter plaatse waar de as *a* het snijvlak φ doorboort;

2°. de kromme R_n snijdt het vlak φ n-maal. Al deze doorgangen zijn $(n - 1)$-voudige punten;

3°. de dubbelkromme (Q) wordt door het vlak φ in $\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(3n-4)}{8}$ punten geneden, welke snijpunten allen dubbelpunten der doorsnede zijn;

4°. Het oppervlak der trisecanten levert $\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3}$ trisecanten die ook op ρ gelegen zijn. Deze geven derhalve evenveel 3-voudige punten in de vlakke doorsnede met φ. Want elke trisecante is drievoudige rechte op ρ.

Met deze gegevens laat zich het geslacht der vlakke doorsnede berekenen dat is volgens bepaling 't *geslacht* van het *involutie*regelvlak ρ. Na eerst alle veelvoudige punten be-

hoorlijk tot dubbelpunten herleid te hebben vindt men

$$g' = \frac{[(n-1)^2-1][(n-1)^2-2]}{1.2.} - n\frac{(n-1)(n-2)}{1.2.} -$$
$$- {}^1/_2 \frac{(n-1)(n-2)}{1.2.}\left(\frac{n^2-3n+2}{2}\right) -$$
$$- \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(3n-4)}{8}(n-1)(n-2)(n-3)$$

zoodat na eenvoudige herleiding het *geslacht* van ρ blijkt te zijn

$$g' = \frac{(n-2)(n-3)}{1.2.}$$

§ 6. Rechtstreeks laat g' zich ook bepalen, door afbeelding op eene kegelsnede C_2. De I_n gaat dan over in een op die kegelsnede gelegen J_n, waarvan de omhullende of involutiekromme de klasse heeft $(n-1)$; [want in 't algemeen zullen er geen dubbelraaklijnen zijn; daarvoor moesten er in één groep van toegevoegde punten minstens twee dubbelpunten voorkomen]. Voor het geslacht der omhullende op de C_n geldt nu

$$g' = {}^1/_2 (n-2)(n-3)$$

en dit is nu tevens het geslacht eener vlakke doorsnede van het regelvlak ρ. Immers de verbindingslijnen $P' P''$ op de C_2 stemmen één aan één overeen met de rechten van het regelvlak ρ en daarom ook met de punten eener vlakke doorsnede φ.

---

§ 7. Toepassing voor $n = 3$.

De cubische involutie moet door twee drietallen bepaald zijn. Ik neem daarom de tripels A_1, A_2, A_3 en B_1, B_2, B_3 willekeurig op de gegeven cubische ruimtekromme aan. Zij bepalen de vlakken α en β, waarvan ik de snijlijn a zal noemen. Beschouw ik nu de lijn a als as van een vlakkenbundel, dan doet deze laatste op de K_3 een axiale I_3 ontstaan, die de gegeven groepen (A) en (B) bevat en derhalve de axiale I_3 is, welke door de beide groepen bepaald wordt.

Door de verbindingslijnen van toegevoegde punten wordt weder een regelvlak ρ gevormd. De as a is op ρ gelegen, want zij wordt door alle lijnen $P_1 P_2$ gesneden en zij moet *enkelvoudige* richtlijn zijn, daar door elk punt van de ruimte slechts één bisecante kan getrokken worden en dus ook uit elk punt van a slechts één rechte $P_1 P_2$ van ρ kan gaan.

Wij zien verder, dat in elk vlak van den vlakkenbundel gelegen zijn vier rechten van ρ, en dat het regelvlak derhalve van den 4^{en} graad is, terwijl de kromme R_3 een dubbelkromme op het regelvlak $P_1 P_2$ is.

Ofschoon alle eigenschappen der I_3 op een *rechte* voor deze op een ruimtekromme gelegen I_3 moeten blijven gelden, wil ik er toch nog een paar rechtstreeks aantoonen.

Zoo werd reeds bewezen, dat een I_3 bepaald is door één volledige groep en twee paren. Neem ik de groep A_1, A_2, A_3 en de paren B_1, B_2 en C_1, C_2 als gegeven aan, dan zijn de snijpunten der rechten B_1, B_2 en C_1, C_2 met 't vlak $(A_1 A_2 A_3)$ bekend. De lijn door die twee snijpunten is de as a van den vlakkenbundel, die de I_3 zal insnijden. Door vier paren is een I_3 niet bepaald; want de vier verbindingslijnen $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, enz. moeten alle de as a snijden, doch zij bepalen de as *niet*. Zij hebben immers twee transversalen a en a' (*) Slechts wanneer a en a' samenvallen is de I_3 bepaald. Wanneer is dit zoo?

De vier rechten a, b, c, d hebben twee transversalen, die 8 snijpunten doen ontstaan. Lagen echter de vier lijnen a, b, c, d toevallig op één hyperboloïde, dan hadden ze oneindig veel transversalen en was de I_3 in 't geheel niet meer bepaald. Maar het kan ook gebeuren dat de vierde lijn d raaklijn is aan de hyperboloïde door de drie andere bepaald, dus aan de hyperboloïde (a, b, c.) Dan hebben de vier krui-

---

(*) *St:* Vier rechten hebben *twee* transversalen.

Bewijs: Drie rechten a, b, c bepalen een hyperboloïde, welke door de 4e rechte d in twee punten D_1 en D_2 gesneden wordt. Maar door de punten D_1 en D_2 loopen *twee* lijnen van het stelsel waartoe a, b en c niet behooren. Zij snijden de rechten a, b, c en d.

sende lijnen *a, b, c, d* slechts één transversaal. Blijkbaar wordt nu de hyperboloïde (a, b, d) aangeraakt door de lijn *c;* evenzoo moet *b* raken aan de hyperboloïde (a, c, d) en moet *a* raken aan de hyperboloïde (b, c, d). Bestaat één van deze gevallen, dan is de I_3 ondubbelzinnig door vier paren bepaald.

Ten slotte nog de vraag, hoeveel paren hebben twee axiale cubische involuties gemeen? De assen der vlakkenbundels die de involuties insnijden *a* en *a'* zijn dan bekend. Het regelvlak door *a* is van den vierden graad en wordt door *a'* in vier punten A gesneden, waardoor vier lijnen van regelvlak *(a)* gaan, die natuurlijk *bise*canten van K_3 zijn. Omdat ze *a'* ook snijden zijn het rechte van 't regelvlak (a'). De beide regelvlakken hebben die vier lijnen gemeen of m. a. w. de involuties hebben *vier* paren gemeen.

---

§ 8. De I_2 op een rationale R_3.

Als bijzonder geval der axiale I_3 ontstaat de quadratische involutie, zoodra de as van den vlakkenbundel unisecante wordt.

Zijn omgekeerd de paren A_1, A_2 en B_1, B_2 eener I_2 gegeven en neemt men op de R_3 'n willekeurig punt O dan gaat uit O maar één snijlijn *l* van $A_1 A_2$ en $B_1 B_2$, en wel de snijlijn der vlakken $O A_1 A_2$ en $O B_1 B_2$. Nu is *l* de as van den vlakkenbundel die de I_2 doet ontstaan. Alle koorden $P_1 P_2$ rusten op *l*. Het involutieregelvlak is dus quadratisch, want in elk vlak van den bundel ligt de lijn *l* en nog een lijn $P_1 P_2$. Wordt O verplaatst dan kan natuurlijk 't regelvlak niet veranderen, waaruit wij zien dat de koorden de beschrijvende lijnen van 't eene stelsel vormen, terwijl de oneindig velen assen der vlakkenbundels het andere stelsel voorstellen. De koorden zijn alle bisecanten, de assen unisecanten.

De dubbelpunten der I_2 doen twee raaklijnen der R_3 ontstaan.

---

§ 9. Toepassing voor $n = 4$.

Stelt men in de algemeene uitkomsten $n = 4$ dan komen de resultaten voor dit geval te voorschijn. Maar als meer bepaald voorbeeld zal ik het geval $n = 4$ nog opzettelijk behandelen.

Alle vlakken door de willekeurig in de ruimte aangenomen as a, snijden de R_4 volgens de groepen eener axiale I_4. Het regelvlak ρ is van den graad 9; de R_4 vervult op ρ de rol van drievoudige kromme en de as a die van drievoudige rechte; het eerste blijkt uit het feit dat P_1 met drie toegevoegde punten verbonden wordt en het laatste is duidelijk wanneer men bedenkt dat de vlakkenschoof door een willekeurig punt der ruimte op de R_4 eene I_4^2 bepaalt met *drie* neutrale puntenparen, d. w. z. door elk punt der as a gaan drie *bisecanten*.

Maar ρ bezit nog een dubbelkromme n.l. de meetkundige plaats der punten Q. Weet ik hoe vaak Q op a komt, dan is de graad van (Q) bekend. De verwantschap (R, R') heeft tot symbool $(3, 3)$ en bezit *6* dubbelpunten $R \equiv R'$, die tegelijk punten Q op a zijn.

Echter is elk dubbelpunt een *dubbele* coïncidentie, zooals licht blijkt en er liggen zoodoende *drie* punten Q op de as a. Ten slotte blijkt nu de graad van de dubbelkromme (Q) te zijn 6, terwijl a natuurlijk *trisecante* van (Q) is.

De vlakkenschoof door een punt P' der R_4 doet een I_3^2 ontstaan met één neutraal elementenpaar, d. w. z. door elk punt der R_4 gaat slechts één trisecante $P' P'' P'''$, terwijl tusschen die punten P eene I_3 bestaat, die $2 \times 3 = 6$ paren met de axiale I_4 gemeen heeft.

De bijbehoorende trisecanten moeten allen de as a snijden; doch bedenkende dat zoo'n trisecante drie paren der I_4 bevat, komen we tot het besluit, dat de as a door $(6:3) = 2$ trisecanten wordt gesneden, die ook drievoudige rechten van ρ zijn.

In de vlakke doorsnede ϕ van het regelvlak ρ vinden we nu:

1°. Vier drievoudige snijpunten met de kromme R_4;

2⁰. Zes dubbelpunten van de kromme (Q);

3⁰. Een drievoudig snijpunt van a;

4⁰. Nog twee drievoudige punten afkomstig van de zooeven genoemde op ρ gelegene trisecanten.

Trek ik al deze singulariteiten in den vorm van dubbelpunten genomen af van het maximum aantal der kromme ϕ_9, dan is het verschil

$$\frac{8 \times 7}{2} - 4 \times 3 - 6 - 3 - 6 = 1.$$

Het regelvlak ρ is nu van *graad* 9 en van *geslacht* 1, zooals ook te vinden is door afbeelding op een kegelsnede.

---

§ 10. DE INVOLUTIE I_p. HET REGELVLAK ($P_1 P_2$).

Op de ruimtekromme R_n is een involutie van den p^en graad I_p gegeven, en wij verbinden alle toegevoegde punten P_1, P_2 door rechten. De meetkundige plaats dezer lijnen, of het *regelvlak* ρ door al die rechten gevormd, beschouwen wij in de eerste plaats. Dat de *graad* van ρ moet wezen

$$n' = (n - 1)(p - 1)$$

is niet moeilijk in te zien. Zoek slechts hoeveel rechten $P_1 P_2$ een willekeurige lijn l ontmoeten.

Daartoe beschouwen we den vlakkenbundel (l), die op R_n een axiale I_n aanwijst, welke involutie $(n - 1)(p - 1)$ paren gemeen heeft met de reeds aanwezige I_p.

De verbindingslijnen dezer gemeenschappelijke paren liggen natuurlijk in vlakken door de as l; hun aantal wijst den graad van ρ aan.

De rationeele kromme R_n laat zich punt voor punt afbeelden op een kegelsnede K_2, waarop wij dan eene involutie J_p terugvinden, met een omhullende, waarvan de klasse gelijk is aan $(p - 1)$, en waarvan het geslacht derhalve $\frac{1}{2}(p - 2)(p - 3)$ is. Want in 't algemeen is $\tau = 0$ en steeds is $\beta = 0$.

De rechten van 't regelvlak $P_1 P_2$ stemmen projectief overeen met de verbindingslijnen $P' P''$ der paren van de J_p. waaruit mag afgeleid worden dat het *geslacht* van het regelvlak ρ ook is

$$g' = \frac{1}{2} (p - 2)(p - 3).$$

Snijden we nu ρ met een plat vlak ϕ, dan is van de doorsnede de graad n' en het geslacht g' bekend. Het totale aantal aanwezige dubbelpunten is dan

$$\frac{(n' - 1)(n' - 2)}{1.2.} - g'.$$

Intusschen, de kromme R_n van uitgang is blijkbaar $(p - 1)$-voudige lijn op ρ en geeft dientengevolge in het vlak ϕ *n* punten die alle $(p - 1)$-voudig zijn, dus samen $\frac{1}{2} n (p - 1)(p - 2)$ dubbelpunten vertegenwoordigen.

Trekken wij deze af van het gevonden aantal, dan blijven er

$$\frac{(n' - 1)(n' - 2)}{1.2.} - g' - \frac{n(p - 1)(p - 2)}{1.2.}$$

over; m. a. w. op ρ ligt een *dubbelkromme* waarvan de *graad* gelijk is aan dit laatste getal.

---

§ 11. Het geslacht van het regelvlak $(P_1 P_2)$.

Volgens eene stelling(*) van ZEUTHEN geldt: «Bestaat tusschen de punten R van de kromme C^n_m en de punten R′ van $C^{n'}_{m'}$ eene verwantschap, waarin met één punt R overeenkomen β' punten R′ en met één punt R′, β punten R, terwijl het λ maal voorkomt, dat twee der β punten R en λ' maal dat twee der β' punten R′ samenvallen, dan zijn de geslachten D en D′ van C en C′ verbonden door de betrekking

$$\lambda - \lambda' = 2\beta'(D - 1) - 2\beta(D' - 1).$$

Om met behulp van dit verband, het geslacht van ρ te vinden, voeg ik aan het punt P_1 toe het snijpunt S van de

(*) Zie o. a. «Nieuw Archief voor Wiskunde,» deel XVII, 1890. blz. 16.

verbindingslijn $P_2 P_3$ met een willekeurig vlak φ. Aan elk punt P_1 kan ik op die manier $1/2$ (p — 1) (p — 2) punten S toevoegen derhalve

$$\beta' = 1/2\,(p - 1)(p - 2).$$

Aan een punt S zijn blijkbaar toegevoegd (q — 2) punten P of

$$\beta = p - 2.$$

Aan P_1 zijn toegevoegd S_{23}, S_{2k} en S_{3k} (k = 4 .... p). Wordt nu $P_2 \equiv P_3 \equiv D$ dan is $S_{2k} \equiv S_{3k}$. Bij P_1 behooren dan (p — 3) dubbelpunten S. Elke groep met een dubbelpunt D levert dus (p — 2) (p — 3) dubbelpunten S. Dus is

$$\lambda' = 2\,(p - 1)(p - 2)(p - 3).$$

Aan een dubbelpunt D zijn toegevoegd $1/2$ (p — 2) (p — 3) punten S. Er zijn 2 (p — 1) dubbelpunten in de I_p derhalve is

$$\lambda = (p - 1)(p - 2)(p - 3).$$

De verkregen waarden in de formule van ZEUTHEN voegende, vindt men, omdat $\gamma' = 2\gamma$ is, achtereenvolgens

$$- \gamma = - 2\beta' - 2\beta D' + 2\beta \ldots\ldots (D = 0).$$

$$-(p-1)(p-2)(p-3) = -(p-1)(p-2) - 2(p-2)D' +$$

$$+ 2(q-2) - (p-1)(p-3) + (p-1) - 2 = - 2D'$$

$$(p - 3)(p - 1) - (p - 3) = 2D'$$

$$(p - 3)(p - 2) = 2D'$$

$$D' = 1/2\,(p - 2)(p - 3).$$

En hiermee is de uitkomst van de vorige paragraaf teruggevonden.

---

§ 12. DE RUIMTEKROMME WAARAAN DE VLAKKEN ($P_1 P_2 P_3$) OSCULEEREN.

De p toegevoegde punten P eener groep der I_p kunnen drie aan drie door platte vlakken verbonden worden. Deze vlakken omhullen een zeker ontwikkelbaar oppervlak ω en osculeeren een ruimtekromme (M) die de keerkromme van ω is. De *klasse* van dat oppervlak of van die ruimte-

kromme (M) wordt aangegeven door het aantal vlakken $(P_1 P_2 P_3)$ die in een willekeurig punt N samenkomen.

Alle vlakken door N bepalen op de gegeven R_n een involutie I^2_n, welke met de I_p gemeen heeft

$$1/2 (p - 1)(p - 2)(n - 2)$$

drietallen. Door N gaan derhalve even zoovele vlakken $P_1 P_2 P_3$, d. w. z. de *klasse* der kromme (M) is gelijk aan het genoemde getal $1/2 (p - 1)(p - 2)(n - 2)$.

Deze waarde kan ook anders bepaald worden. Twee punten P_1 en P_2 bepalen met het punt N een vlak, dat de punten $Q_3 \ldots\ldots Q_n$ insnijdt op de R_n. Deze punten Q voegen wij toe aan P_1 en P_2, en beschouwen nu de verwantschap $(P_k, Q_{k'})$, $k = 3 \ldots\ldots p$, $k' = 3 \ldots\ldots n$. Een punt P behoort bij $1/2 (p - 1)(p - 2)$ paren P_1, P_2, dus bij evenveel vlakken $(P_1 P_2 N)$, dus bij $1/2 (p - 1)(p - 2)(n - 2)$ punten Q. Aan den anderen kant bepaalt 'n punt Q den vlakken bundel met as (Q N), waardoor op R_n een I_{n-1} ontstaat, die $(p - 1)(n - 2)$ paren P_1, P_2 met de gegeven involutie I_p gemeen heeft. Aan elk punt Q zijn derhalve toegevoegd $(p - 1)(p - 2)(n - 2)$ punten P_k. De $(P_k, Q_{k'})$ heeft nu tot symbool

$$[(p - 1)(p - 2)(n - 2),\ 1/2 (p - 1)(p - 2)(n - 2)].$$

Ontstaat een dubbelelement in deze verwantschap, d. w. z. valt één der punten $P_3 \ldots\ldots P_p$ samen met één der punten $Q_3 \ldots\ldots Q_n$, dan ontstaat een vlak (P_1, P_2, P_3, N), dat drie coïncidenties bevat. Hieruit blijkt dat door N

$$1/2 (p - 1)(p - 2)(n - 2)$$

raakvlakken gaan.

Nu de *klasse* van (M) bekend is, geeft de genoemde stelling van ZEUTHEN het middel om het *geslacht* D' dier ruimtekromme te bepalen.

Ik voeg het osculatiepunt M van 't vlak $(P_1 P_2 P_3)$ toe aan elk der punten $P_4 \ldots\ldots P_p$; dan behooren bij het punt P_4 blijbaar $1/6 (p - 1)(p - 2)(p - 3) = \beta'$ punten M. Verder is

$\beta = (p - 3)$. Daar P_4 wordt toegevoegd aan het raakpunt M^2_{kl} van het vlak $P_2 P_k P_l$ en eveneens aan M^3_{kl}, behooren bij het punt P_4, zoodra het geval $P_2 \equiv P_3 \equiv D$ ontstaat, $1/2\,(p-3)(p-4)$ paren $P_k P_l$ dus even zoovele dubbelpunten M. Iedere groep met een dubbelpunt D levert $(p-2)$-maal zooveel dubbelpunten M. Daar er $2(p-1)$ punten D zijn, is

$$\gamma' = (p-1)(p-2)(p-3)(p-4).$$

Is $P_4 \equiv P_5$, dan zijn er $1/6\,(p-2)(p-3)(p-4)$ punten M_1, waarvoor telkens, twee van de β punten samenvallen. Derhalve

$$\gamma = 1/3\,(p-1)(p-2)(p-3)(p-4).$$

Nu volgt uit

$$\gamma - \gamma' = 2\,\beta'(D-1) - 2\,\beta(D'-1)$$

daar $D = 0$ is,

$$2/3\,(p-1)(p-2)(p-4) = -\,1/3\,(p-1)(p-2) - 2\,(D'-1).$$

Na eenvoudige herleiding vindt men voor het geslacht van (M)

$$D' = 1/6\,(2\,p-1)(p-3)(p-4).$$

Een vlakke doorsnede ϕ van het ontwikkelbaar oppervlak omhuld door de vlakken $(P_1 P_2 P_3)$ is dus van de klasse $k' = 1/2\,(p-1)(p-2)(n-2)$ en van het geslacht D'. Volgens PLÜCKER is

$$D' = 1/2\,(k'-1)(k'-2) - \tau' \qquad \beta' = 0.$$

Hieruit is het aantal der aanwezige *dubbelraakvlakken* te vinden. In elk vlak ϕ liggen dus

$$\tau' = 1/2\,(k'-1)(k'-2) - D'$$

dubbelraaklijnen; ω heeft geen dubbelraakvlakken afkomstig van groepen P_1, P_2, P_3, en P', P'', P''', die in hetzelfde vlak liggen.

Wel komen zij voort uit rechten van ω die elkaar snijden, maar tot verschillende bladen behooren, zoodat de eene in een vlak P_1, P_2, P_3, de andere in een vlak O_1, O_2, O_3, ligt.

Er zijn $\frac{1}{6}(p-1)(p-2)(p-3)(n-3)$ vlakken die 4 punten P_1, P_2, P_3, P_4 bevatten.

Voeg daartoe aan de punten Q welke het vlak $P_1 P_2 P_3$ op R_n insnijdt, de overige punten P_k toe.

Aan een punt P zijn $(p-1)$ punten P' toegevoegd, waardoor $\frac{1}{6}(p-1)(p-2)(p-3)$ vlakken P', P'', P''', en $\frac{1}{6}(p-1)(p-2)(p-3)(n-3)$ punten Q bepaald zijn.

Uit een punt Q gaan $\frac{1}{2}(p-1)(p-2)(n-2)$ raakvlakken, waaronder $\frac{1}{2}(p-1)(p-2)$ die Q met de toegevoegde punten Q', Q'', verbinden. Door Q gaan derhalve $\frac{1}{2}(p-1)(p-2)(n-3)$ vlakken die een groep P', P'', P''', bevatten; waaruit volgt dat aan elk punt Q zijn toegevoegd $\frac{1}{2}(p-1)(p-2)(p-3)(n-3)$ punten P_k.

De verwantschap tusschen de punten P_k en Q heeft tot symbool

$$[\tfrac{1}{6}(p-1)(p-2)(p-3)(n-3),\ \tfrac{1}{2}(p-1)(p-2)(p-3)(n-3)]$$

en bezit $\frac{4}{6}(p-1)(p-2)(p-3)(n-3)$ coïncidenties. Deze coïncidenties liggen 4 aan 4 in één vlak, zoodat het aantal vlakken P_1, P_2, P_3, P_4, is

$$\tfrac{1}{6}(p-1)(p-2)(p-3)(n-3).$$

Zulk een vlak bevat 6 rechten van ρ en is 4-voudig raakvlak van ω langs 4 verschillende rechten. Voor de kromme (M) is het een vlak dat in 4 verschillende punten osculeert.

---

§ 13. Dualistische beschouwingen.

In 't voorgaande hebben wij gezien dat de door een I_p gerangschikte punten eener R_n een regelvlak ρ bepalen met daarop gelegen bijzondere krommen. En ook dat zij een ruimtekromme (M) aanwijzen.

Vervangen wij nu elk punt der R_n door zijn osculatievlak of m. a. w. beschouwen we de R_n als omhullende harer osculatievlakken, dan gaat iedere verbindingslijn $P_1\ P_2$ van het genoemde regelvlak ρ over in de snijlijn der osculatievlakken α_1 en α_2 in de punten P_1 en P_2. De toegevoegde osculatievlakken doen derhalve weder een regelvlak (α) ont-

staan. Verwisselen wij graad met klasse dan volgt uit het voorafgaande dat de *graad* van (α) moet zijn

$$n' = \tfrac{1}{2}(p-1)(k-1).$$

Maar deze is even goed rechtstreeks te bepalen. Ik zoek het aantal rechten die een willekeurige rechte l snijden en merk hiervoor op, dat de osculatievlakken uit de punten van l een I_k op de R_n vormen; (wanneer k de klasse van R_n is). De aldus bepaalde I_k heeft met de bestaande I_p gemeen $(k-1)$ $(p-1)$ paren, d. w. z. er zijn $\tfrac{1}{2}$ $(k-1)$ $(p-1)$ snijlijnen van toegevoegde vlakken, die de lijn l snijden. Dus volgt

$$n' = \tfrac{1}{2}(p-1)(k-1).$$

De verbindingslijnen P_1 P_2 stemmen projectief overeen met de snijlijnen van de osculatievlakken α_1 en α_2. Het geslacht van ρ is daarom ook het geslacht van (α) of

$$g' = \tfrac{1}{2}(p-2)(p-3).$$

Het vlak α_1 wordt door $(p-1)$ vlakken α gesneden en bevat $(p-1)$ rechten van (α); α_1 raakt aan $(p-1)$ bladen van (α) en is $\tfrac{1}{2}$ $(p-1)$ $(p-2)$-voudig raakvlak. Derhalve zijn al de osculatievlakken der kromme R_n $\tfrac{1}{2}$ $(p-1)$ $(p-2)$-voudige raakvlakken aan het regelvlak (α).

Op (α) ligt ook de kromme (S) die de meetkundige plaats is der snijpunten van drie toegevoegde osculatievlakken α. Voor haar graad geldt nu

$$n' = \tfrac{1}{2}(p-1)(p-2)(k-2)$$

en voor 't geslacht onveranderd.

$$g' = \tfrac{1}{6}(2p-1)(p-3)(p-4).$$

---

§ 14, Kubische involuties van den eersten en tweeden graad op kubische ruimtekrommen. (*)

In aansluiting met de eigenschappen der I_3^2 op een vlakke C_3 met een lus (zie Hoofdstuk II) volgt hier de behandeling

(*) «Jan de Vries». Nieuw Archief voor Wiskunde. Tweede reeks, Vierde deel, 101—106.

der I_3^2 op een cubische ruimtekromme R_3, ingesneden door den vlakkenschoof met centrum *M*.

We leggen door een willekeurige koorde der R_3 een vlakkenbundel en brengen hierdoor de I_3^2 punt voor punt over op een willekeurige rechte g; wij zien dan op g een J_3^2 ontstaan. Nu is deze involutie voor te stellen door de trilineaire vergelijking

$$a_0 x_1 x_2 x_3 + a_1 \Sigma x_1 x_2 + a_2 \Sigma x + a_3 = 0.$$

Hieruit blijkt dat door een willekeurig punt M der ruimte drie osculatievlakken gaan.

Wanneer men heeft

$$a_0 x_1 x_2 + a_1 (x_2 + x_3) + a_2 = 0,$$
$$a_1 x_2 x_3 + a_2 (x_2 + x_1) + a_3 = 0,$$

wordt x_1 onbepaald. De verbindingslijn der neutrale punten $P_2 P_3$ moet derhalve door M gaan m. a. w. door elk punt M der ruimte gaat één bisecante.

Wij herinneren ons verder dat reëele neutrale punten op imaginaire drievoudige punten wijzen en omgekeerd, terwijl wanneer twee drievoudige punten samenvallen daar ter plaatse ook een neutraal dubbelpunt ontstaat.

Zijn de neutrale punten P_1 en P_2 reëel, dan is de koorde M P_1 P_2 ook reëel, maar gaat door 't punt M slechts één bestaanbaar osculatievlak. Men mag echter het punt M op de lijn M P_1 P_2 laten verschuiven, het paar $P_1 P_2$ zal toch neutraal paar der komende I_3^2 blijven. In 't algemeen geldt dus: Door elk punt van een reëele koorde gaat slechts één bestaanbaar osculatievlak en door elk punt van een imaginaire bisecante gaan drie reëele osculatievlakken, terwijl door elk punt van raaklijn, behalve het tweemaal te tellen osculatievlak van het raakpunt, nog een osculatievlak gaat.

Stel dat de wortels x_1, x_2 en x_3 der vergelijking

$$b_0 x^3 + 3 b_1 x^2 + 3 b_2 x + b_3 = 0$$

een tripel (B) der J_3^2 bepalen. Dan is

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{3\,b_1}{b_0}, \\ x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = \frac{3\,b_2}{b_0}, \\ x_1 x_2 x_3 = -\frac{b_3}{b_0}, \end{array}\right.$$

Zetten wij deze waarden in de vergelijking der J^2_3, dan komt men tot de voorwaarde:

$$a_3 b_0 - 3\,a_2 b_1 + 3\,a_1 b_2 - a_0 b_3 = 0.$$

Wegens de symmetrie dezer betrekking mogen we besluiten dat nu evenzoo de drievoudige punten A_1, A_2, A_3 een drietal zullen vormen van die J^2_3, waarvan B_1, B_2, B_3 de drievoudige punten zijn.

Aan de laatste vergelijking is te voldoen als men neemt

$$b_0 = a_0, b_1 = a_1, b_2 = a_2, b_3 = a_3$$

d. w. z. de drievoudige elementen der J^2_3 stellen ook een drietal toegevoegde punten dierzelfde involutie voor.

Stereometrisch beteekent 't dat de osculatiepunten der drie osculatievlakken door M in één vlak μ (nulvlak) liggen dat door *M* (nulpunt) gaat. Maar wegens de bestaande symmetrie geldt algemeen:

Wanneer het vlak ν drie punten B_1, B_2, B_3 en het snijpunt M der osculatievlakken van A_1, A_2, A_3 bevat, dan bevat het vlak $A_1, A_2, A_3 \equiv \mu$ het snijpunt N der osculatievlakken van B_1, B_2, B_3.

We voegen op deze wijs punt en vlak in de ruimte aan elkaar toe, zoowel in 't geval in het vlak werkelijk drie bestaanbare punten liggen als wanneer door een punt drie bestaanbare osculatievlakken gaan.

Gaat uit een punt M slechts één reëel osculatievlak en is A_1 het osculatiepunt dan kan men door M een vlak ν leggen dat de R_3 in de reëele punten B_1, B_2, B_3 snijdt.

Is N het nulpunt van ν dan is het nulpunt μ van M bepaald door de drie punten M, N en A_1.

Snijdt het vlak μ de kromme slechts in één reëel punt A_1, dan kunnen wij in μ een punt N kiezen waardoor drie

bestaanbare osculatievlakken loopen het nulvlak ν van N bepalen. Nu is het snijpunt van 't osculatievlak van A_1 met de vlakken μ en ν, het nulpunt van μ.

Uit 't voorgaande blijkt

1e. 't punt M ligt in vlak μ
» N » » » ν

2e. 't punt M ligt in vlak ν
» N » » » μ

Dus de lijn M N moet de snijlijn der vlakken μ en ν zijn, of anders.

«Wanneer het punt N in 't nulvlak van M ligt, is ook M in het nulvlak van N gelegen.»

§ 15. We beschouwen M en N als middelpunten van twee vlakkenschooven. Blijkbaar zal nu de vlakkenbundel door de lijn M N die tripels insnijden welke gemeen zijn aan de beide involuties J_3^2 door M en N bepaald.

Zij vormen eene cubische involutie I_3 die derhalve voor te stellen is door de twee trilineaire vergelijkingen:

$$\begin{cases} a_0 x_1 x_2 x_3 + a_1 \Sigma x_1 x_2 + a_2 \Sigma x + a_3 = 0 \\ b_0 x_1 x_2 x_3 + b_1 \Sigma x_1 x_2 + b_2 \Sigma x + b_3 = 0 \end{cases}$$

Wij maakten hiervan reeds in Hoofdstuk III gebruik,

Stelt men $x_2 = x_3$ dan krijgt men na eliminatie van x_1 ter bepaling van de dubbelpunten der I_3 de volgende vergelijking

$$\begin{vmatrix} a_0 x^2 + 2 a_1 x + a_2, & a_1 x^2 + 2 a_2 x + a_3 \\ b_0 x^2 + 2 b_1 x + b_2, & b_1 x^2 + 2 b_2 x + b_3 \end{vmatrix} = 0$$

waaruit blijkt dat de I_3 vier dubbelpunten bezit. Hiermee gaat samen dat door de as M N vier raakvlakken aan R_3 gaan of dat elke rechte der ruimte door vier raaklijnen gesneden wordt. Het ontwikkelbaar raaklijnenoppervlak der R_3 is derhalve van den vierden graad.

Snijdt de as van den vlakkenbundel de R_3, dan ontstaat eene quadratische involutie I_2. Deze heeft slechts twee dubbelpunten zoodat nu de as buiten de R_3 nog door twee

raaklijnen gesneden wordt. Elke unisecante wordt door twee raaklijnen ontmoet; de beide andere zijn samengevallen tot de raaklijn in het snijpunt der unisecante met de R_3, zoodat wij zien dat de cubische kromme keerkromme is van haar raaklijnenoppervlak.

Nemen we de doorsnede van twee osculatievlakken als as van een vlakkenbundel dan bezit de op g geprojecteerde I_3 twee drievoudige punten. Hebben deze de coordinaten $x = p$ en $x = q$, dan kan de vergelijking der bedoelde I_3 geschreven worden in den vorm

$$(x - p)^3 = \lambda \, (x - q)^3;$$

dus is

$$x - p = \lambda^{1/3} . (x - q)$$

Geven we nu één punt x_1 dan vinden wij, omdat de $\sqrt[3]{\lambda}$ maar één bestaanbare waarde bezit en p zoowel als q reëel zijn, voor x_2 en x_3 twee toegevoegd imaginaire punten. De bedoelde I_3 heeft dus dit eigenaardige dat al hare driepuntige groepen slechts één bestaanbaar punt bezitten.

§ 16. We leggen door de willekeurige lijn l een vlak π, dat de R_3 in A_1, A_2 en A_3 snijdt en noemen het nulpunt P_1. Draait 't vlak π om l, dan loopt P_1 over een rechte l'. Immers, zijn M en N twee punten van l, dan moeten de bijbehoorende nulvlakken μ en ν door P_1 gaan. De punten M en N zijn vast en de punten μ en ν ook. De snijlijn van μ en ν is dus de genoemde lijn l'. De bisecante $P_1 Q_2 Q_3$ bepaalt met l' een vlak, dat nog een punt Q_3 op R_3 aanwijst. De lijn $Q_1 Q_3$ snijdt op l' een punt P_2 in, dat nu natuurlijk het nulpunt is van 't vlak $(P_2 l)$. Zoo geeft $Q_1 Q_2$ op l' een punt P_2 aan, dat evenzoo het nulpunt van 't vlak $(P_3 l)$ voorstelt.

Wij zien hieruit dat de punten (P) een kubische involutie op l' vormen, die uit de as l geprojecteerd wordt door een kubischen vlakkenbundel, waarin $(P_1 l) (P_2 l) P_3 l)$ een drietal vormen.

Laten wij het vlak π in een raakvlak der R_3 overgaan, rakende in 't punt $A_1 \equiv A_2 \equiv A_{12}$, dan is de raaklijn a_{12} in

dat punt te beschouwen als grensstand der doorsnede van twee osculatievlakken in dat punt. Het nulpunt P van π is nu 't snijpunt van a_{12} met 't osculatievlak in A_3. De raaklijn a_{12} stelt dan de bisecante uit P' voor, zoodat A_{12} een paar P_1, Q_2 der involutie (Q) voorstelt. Het blijkt dus, dat de 4 dubbelpunten der involutie (A) tegelijk de dubbelpunten der involutie (Q) zijn. Maar 4 punten der R_3 kunnen slechts de dubbelpunten van twee involuties I_3 vertegenwoordigen, want de vier raaklijnen in die punten hebben altijd slechts twee transversalen l en l'. Deze l en l' zijn de assen der beide bundels, die de involuties moeten insnijden. We noemen de involuties op l en op l' *toegevoegd*. Tusschen hen bestaat de wederkeerige betrekking, dat elk paar der eene involutie het neutrale paar is eener kubische involutie van den tweeden graad waarvan de drievoudige elementen een drietal der tweede involutie vormen. Zoo ligt bijv. het paar Q_1, Q_2 op de bisecante $P_1 Q_1 Q_2$. De vlakkenschoof uit P_1 snijdt op de R_3 eene J_3^2 in, waarvan 't tweetal $Q_1 Q_2$ 't neutrale paar is. Tevens gaan uit P_1 ook drie osculatievlakken aan R_3, die drie drievoudige elementen $A_1 A_2 A_3$ der J_3^2 aanwijzen. Maar volgens 't voorgaande liggen nu de drie punten $A_1 A_2 A_3$ in 't vlak π, dat door l en P_1 gaat, en vormen zij dus een drietal der involutie (A).

Hoort l tot een stralenbundel waarvan 't middelpunt het nulpunt van zijn vlak is, dan valt l' met l samen. Men krijgt dan eene involutie die aan zichzelf is toegevoegd.

Zooals reeds vroeger werd opgemerkt, kan eene I_3 niet alleen door twee drietallen maar ook door één drietal $A_1 A_2 A_3$ en twee paren B_1, B_2 en C_1, C_2 volkomen bepaald worden.

Het blijkt ook hier. Immers de as van den insnijdenden bundel is dan de lijn, die de snijpunten van $B_1 B_2$ en $C_1 C_2$ met 't vlak $A_1 A_2 A_3$ verbindt.

Geeft men vier puntenparen, dan hebben de door hen bepaalde koorden twee transversalen, die de assen kunnen voorstellen van twee bundels. Door vier paren zijn derhalve twee kubische involuties aangewezen.

Bestaat op R_3 eene biquadratische involutie I_4, dan vormen

de vlakken, die elk drie toegevoegde punten bevatten, een stelsel zoodanig, dat door een punt P_1 drie van die vlakkeng aan n.l. $P_1 P_2 P_3, P_1 P_2 P_4$ en $P_1 P_3 P_4$. Zij osculeeren derhalve een tweede kubische ruimtekromme. Bedenken we dat de I_4 door twee quadrupels bepaald is, dan vinden we hieruit de stelling: dat de vlakken van twee in een R_3 beschreven tetraëders osculatievlakken zijn aan een tweede R_3.

Drie op R_3 willekeurig gekozen viertallen bepalen eene biquadratische involutie van den tweeden rang I^2_4.

Vormen P_1, P_2, P_3, P_4 een groep dezer I^2_4 dan gaan door de koorde $P_1 P_2$ twee vlakken $P_1 P_2 P_3$ en $P_1 P_2 P_4$, die elk een tripel der involutie dragen. Die vlakken omhullen derhalve een quadratisch involutieoppervlak. Wij zien hierdoor de stelling bewezen dat drie willekeurige ingeschreven tetraëders eener R_3 aan een zelfde quadratisch oppervlak omgeschreven zijn.

HOOFDSTUK V.

§ 1. Rationale Ruimtekrommen.

Algemeene eigenschappen.

De vlakken der ruimte snijden op een rationale ruimtekromme van den *n*[en] graad eene involutie I^3_n in.

Twee punten A en B, die op de ruimtekromme R_n als *vast* aangenomen worden, bepalen de as van een vlakkenbundel, die op R_n eene I^1_{n-2} afteekent. Deze involutie bezit $2\,(n-3)$ dubbelpunten, of anders.

Stelling: «Door elke bisecante gaan $2\,(n-3)$ raakvlakken aan de R_n».

Het gevolg is dat (wanneer $A \equiv B$, d. w. z. wanneer de as A B *raak*lijn wordt aan de R_n) «door elke raaklijn $2\,(n-3)$ vlakken gaan die nog ergens anders raken». Het zijn alle dubbelraakvlakken, met raakpunten A en R. De raaklijnen in de punten R snijden de raaklijn in A, dus

Stelling (bij «door elke raaklijn…»): zie boven.

Stelling: «Iedere raaklijn wordt steeds door $2\,(n-3)$ andere gesneden.»

De vlakken door een willekeurig punt P der ruimte (vlakkenschoof P) geven op de R_n een I^2_n aan, met $3\,(n-2)$ drievoudige punten, d. w. z.

Stelling: «Door P gaan $3\,(n-2)$ osculatievlakken of de *klasse* der ruimtekromme is $3\,(n-2)$».

De vlakkenschoof door P. bepaalt eene I^2_n, die $2\,(n-2)\,(n-3)$ groepen met twee dubbelelementen bezit dus

Stelling: «Door elk punt der ruimte gaan $2\,(n-2)\,(n-3)$ dubbelraakvlakken».

Ligt P òp de kromme dan wordt een I^2_{n-1} ingesneden met $3\,(n-3)$ drievoudige punten, dus

Stelling: «Door elk punt van de kromme R_n gaan $3\,(n-3)$ osculatievlakken die ergens anders osculeeren.»

De I^2_{n-1} bezit $\frac{(n-2)(n-3)}{1.2.}$ *neutrale* puntenparen, d. w. z.

ing: «Door elk punt der ruimtekromme R_n gaan $1/2$ $(n-2)$ $(n-3)$ trisecanten».

De I^2_{n-1} moet 2 $(n-3)$ $(n-4)$ groepen met twee dubbelelementen bezitten, dus

ing: «Door elk punt der R_n kunnen 2 $(n-3)$ $(n-4)$ dubbelraakvlakken gebracht worden.»

De vlakken der ruimte snijden op de R_n een involutie I^3_n in, die 4 $(n-3)$ viervoudige elementen bezit, waaruit volgt

ing: «De rationale ruimtekromme R_n bezit in 't geheel 4 $(n-3)$ vierpuntige osculatievlakken (stationaire vlakken)».

Ook is bekend dat de I^3_n bezit $\frac{1.2}{1.2.3.}$ $(n-3)$ $(n-4)$ $(n-5)$ groepen met drie dubbelpunten d. w. z.

ing: «De rationale ruimtekromme R_n bezit in 't geheel $4/3$ $(n-3)$ $(n-4)$ $(n-5)$ drievoudige raakvlakken.»

De I^2_n bezit $1/2$ $(n-1)$ $(n-2)$ *neutrale* elementen, of

ing: «Door elk punt der ruimte gaan $1/2$ $(n-1)$ $(n-2)$ *bisecanten*».

---

§ 2. Centrale projectie der R_N.

De rechten die de ruimtekromme uit het willekeurig in de ruimte genomen punt P projecteeren, vormen een kegeloppervlak van den n^{en} *graad.*

Het willekeurige vlak ϕ snijdt den kegel volgens eene vlakke kromme k_n, die een zeker aantal dubbelpunten zal bezitten. Immers, gaat door P een bisecante, dan is die te beschouwen als doorsnede van twee bladen. In ϕ levert zoo'n bisecante dan een dubbelpunt, en in 't geheel komen er $1/2$ $(n-1)$ $(n-2)$ dubbelpunten in ϕ. Dit aantal is echter het maximum aantal dat een vlakke kromme van den n^{en} graad kan vertoonen. Het *geslacht* der kromme k_n is dus *nul.*

Komt het punt P op de R_n dan wordt de projectiekegel

van den *graad* (n — 1). De vlakke kromme in ϕ is nu van den graad (n — 1) en bezit hoogstens

$$\frac{(n-2)\ (n-3)}{1.\ 2.}\ \text{dubbelpunten.}$$

Toch blijft het *geslacht* der vlakke kromme *nul,* want door P gaan 1/2 (n — 2) (n — 3) trisecanten die juist het vereischte aantal dubbelpunten in ϕ doen ontstaan.

---

§ 3. Raakvlakken en raaklijnen.

Het punt P buiten de R_n is de top van een kegel van den n^{en} graad.

In de doorsnede ϕ lag de vlakke kromme k_n met 1/2 (n — 1) (n — 2) dubbelpunten. De *klasse* van k_n is dus

$$n\ (n-1) - (n-1)\ (n-2) = 2\ (n-1).$$

Uit elk willekeurig punt Q van ϕ gaan 2 (n — 1) raaklijnen aan de vlakke kromme k_n; bijgevolg gaan door de lijn PQ evenveel raakvlakken aan R_n.

Ligt P òp de ruimtekromme dan gaan in ϕ door elk punt Q 2 (n — 2) raaklijnen. Door elke unisecante gaan derhalve 2 (n — 2) raakvlakken aan de ruimtekromme.

Anders;

De vlakkenbundel door de willekeurige lijn l geeft op de R_n een I^1_n, met 2 (n — 1) dubbelpunten.

Door elke lijn l in de ruimte gaan dus 2 (n — 1) raakvlakken, waarin een even groot aantal raaklijnen die l snijden. Het ontwikkelbaar raaklijnenoppervlak is van den *graad* 2 (n — 1). Wegens de projectieve overeenstemming tusschen de punten der R_n en hunne raaklijnen is het *geslacht* van het raaklijnenoppervlak *nul.*

De vlakke doorsnede ϕ levert nu een vlakke kromme $k_{2\,(n-1)}$ van het geslacht nul. Ze moet blijkbaar (2 n — 3) (n — 2) dubbelpunten bezitten, die op het bestaan eener *dubbelkromme* op het raaklijnenoppervlak wijzen. Maar de

raaklijnen in twee opvolgende punten der R_n snijden elkaar, d. w. z. de ruimtekromme zelf is *keerkromme* van het raaklijnenoppervlak. In ϕ ontstaan n snijpunten met die keerkromme, dus n keerpunten.

Voor den *graad* der *dubbelkromme* op het raaklijnenoppervlak wordt alzoo gevonden:

$$(2n - 3)(n - 2) - n = 2(n - 1)(n - 3).$$

Nemen we voor l een secante, dan geeft de vlakkenbundel l op de R_n een I_{n-1} met $2(n - 2)$ dubbelpunten, of door l gaan $2(n - 2)$ raakvlakken, die buiten l de R_n raken. Het raakvlak door l telt derhalve voor *twee*.

Nemen we de lijn l als *bise*cante dan geeft de vlakkenbundel door l op de R_n een I_{n-2} met $2(n-3)$ dubbelpunten Door een bisecante gaan $2(n - 3)$ raakvlakken, terwijl elk raakvlak in de steunpunten voor twee geldt.

Beschouwen we de raaklijn als grensgeval van een bisecante dan blijkt dat door elke raaklijn gaan $2(n - 3)$ dubbelraakvlakken. [Zie § 1.]

Is de lijn l trisecante dan snijdt de vlakkenbundel door l op de R_n in een I_{n-3}, met $2(n - 4)$ dubbelpunten. Door elke trisecante gaan derhalve $2(n - 4)$ raakvlakken.

Uit een willekeurig punt A der ruimtekromme gaan $1/2(n - 2)(n - 3)$ trisecanten [zie § 1], die de kromme elk nog in twee punten B zullen snijden. De verwantschap tusschen de punten A en B is blijkbaar symmetrisch en heeft tot kenmerkend geval

$$(n - 2)(n - 3);$$

zij bezit derhalve $2(n - 2)(n - 3)$ dubbelpunten. Deze punten $A \equiv B$ wijzen raaklijnen aan, die de kromme snijden in de punten B^1; deze snijpunten moeten punten der dubbelkromme van het ontwikkelbaar oppervlak der raaklijnen zijn. Derhalve *keer*punten. Zoo zijn er dus $2(n - 2)(n - 3)$.

Iedere raaklijn wordt door $2(n - 3)$ raaklijnen gesneden.

De raakpunten van elkaar snijdende raaklijnen vormen eene symmetrische verwantschap $[2(n - 3)]$. Deze heeft

met de verwantschap $[(n-2)(n-3)]$ der punten (A, B) een aantal paren gemeen dat gevonden wordt door de formule $2(n-2)(n-3)^2$. Van deze gemeenschappelijke paren zijn er $2(n-2)(n-3)$ afkomstig van de raaklijnen die de R_n snijden. De overschietende $2(n-2)(n-3)(n-4)$ paren wijzen op het aantal malen dat de raaklijnen in twee punten van een zelfde trisecante elkaar snijden. De dubbelpunten der $[2(n-3)]$ zijn de raakpunten der stationaire raakvlakken (planaire buigpunten).

Zij liggen ook op de dubbelkromme.

Dan wordt tevens een trisecante door de onmiddellijk volgende gesneden en vormt een z.g. «ribbe» van het regelvlak der trisecanten.

---

§ 4. Osculatievlakken en Dubbelraakvlakken.

Het raakvlak door de raaklijn *a* in een punt A der ruimtekromme en door een willekeurig punt P der ruimte wijst $(n-2)$ punten B aan op R_n. Een lijn BP bepaalt een vlakkenbundel, waarin $2(n-2)$ raakvlakken. Met één punt B komen dus $2(n-2)$ punten A overeen.

De verwantschap tusschen de punten A en B heeft nu tot symbool

$$[(n-2),\ 2(n-2)]$$

met $3(n-2)$ coïncidenties $A \equiv B$ d. w. z.

«Door elk willekeurig punt der ruimte gaan $3(n-2)$ osculatievlakken».

De genoemde verwantschap heeft $4(n-2)(n-3)$ vertakkingspunten.

In die gevallen ontstaan dubbelraakvlakken n.l. wanneer twee punten B samenvallen. Maar zoo'n dubbelpunt B is ook als een punt A te beschouwen en dan is A ook een dubbelpunt. Elk dubbelraakvlak telt dus tweemaal. Hun aantal is dus $2(n-2)(n-3)$.

De vlakkenschoof door P geeft hetzelfde resultaat. (§ 1.)

Door een punt P der ruimtekrommen gaan $3(n-3)$ osculatievlakken die elk $(n-4)$ punten Q op R_n aanwijzen. De punten P en Q zijn blijkbaar in een symmetrische verwantschap verbonden die voorgesteld kan worden door het symbool

$$[3(n-3)(n-4)].$$

Hierin komen $6(n-3)(n-4)$ elementen voor die aan zich zelf zijn toegevoegd, d. w. z.:
$6(n-3)(n-4)$ osculatievlakken raken nog ergens anders.

Het laatste stelsel bezit bovendien $6(n-3)(n-4)$ $(3n^2-21n+35)$ vertakkingselementen. Tot deze vertakkingselementen behooren ook de $6(n-3)(n-4)(n-5)$ punten die met een coïncidentie $P \equiv Q$ in een zelfde osculatievlak liggen.

Zoo blijven nog over

$$6(n-3)(n-4)(3n^2-22n+40)$$

paren van vertakkingspunten P, Q. Dus

$$3(n-3)(n-4)^2(3n-10)$$

paren van osculatievlakken die een koorde gemeen hebben.

---

§ 5. Oppervlak der bisecanten, rustende op een rechte lijn.

Een willekeurig plat vlak door een lijn l wordt door de R_n in n punten gesneden, die $\frac{1}{2}n(n-1)$ *bisecanten* bepalen. Uit elk punt van l gaan $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ bisecanten. De lijn l is dus een $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$-voudige lijn en het oppervlak O der bisecanten is blijkbaar van den graad

$$\tfrac{1}{2}n(n-1)+\tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)=(n-1)^2.$$

Een willekeurige rechte lijn in de ruimte wordt derhalve door $(n-1)^2$ bisecanten gesneden, hetgeen ook direct blijkt, wanneer we door de laatst bedoelde lijn en vlakkenbundel leggen. Die heeft dan tot doorsnede met de kromme een I_n.

Op de R_n zijn nu twee involuties van den n^{en} graad aanwezig die $(n-1)^2$ gemeenschappelijke paren hebben. De verbindingslijnen dezer paren zijn, bisecanten, die de lijn l maar ook de andere rechte snijden.

Het raakvlak aan O in één der n snijpunten S_1 van R_n met een vlak door l bevat de raaklijn s_1 in S_1 aan R_n en één der bisecanten $S_1 S_2, \ldots \ldots . S_1 S_n$.

In elk punt der ruimtekromme R_n bestaan nu $(n-1)$ raakvlakken aan het oppervlak O der bisecanten d. w. z. R_n is een $(n-1)$-voudige lijn op O.

Beschouwen we de n in een vlak door l gelegen snijpunten S met de ruimtekromme, dan geven de snijpunten van in dat vlak gelegen bisecanten *dubbel*punten Q afkomstig van de op O gelegen dubbelkromme.

De *graad* dezer dubbelkromme (Q) is (zie Involuties op Rationale Krommen)

$$1/8\,(n-1)(n-2)(n-3)(3n-4).$$

Nemen we de lijn l als secante in het punt S, dan valt het oppervlak der bisecanten O uiteen in den kegel van den graad $(n-1)$, die de R_n uit S projecteert en een *regelvlak* van den graad

$$(n-1)^2-(n-1)=(n-1)(n-2).$$

Elk vlak door de secante l snijdt behalve het steunpunt S_1 nog $(n-1)$ punten $S_2 \ldots . . S_n$ in. Men heeft in S_2 klaarblijkelijk $(n-2)$ raakvlakken welke de raaklijn in S_2 verbinden met de bisecanten $S_2 S_3 \ldots . . S_2 S_n$. In elk punt der R_n zijn dus $(n-2)$ raakvlakken aan het oppervlak der bisecanten. De ruimtekromme R_n is op dat oppervlak een $(n-2)$-voudige lijn; $(n-2)$ bladen van het oppervlak O gaan door de ruimtekromme.

De as l van den vlakkenbundel blijft $1/2\,(n-1)(n-2)$-voudig. In elk vlak door l bevinden zich nog $(n-1)$ punten S. Zij geven

$$1/8\,(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$$

punten Q aan, en men vindt dat de dubbelkromme (Q) van den *graad* $\frac{1}{8}(n-2)(n-3)(n-4)(3n-7)$ is.

De lijn l kan ook *bise*cante $S_1 S_2$ zijn. Dan ontstaan twee kegels van den graad $(n-1)$. Het overschietende regelvlak is nu van den *graad*

$$(n-1)^2 - 2(n-1) = (n-1)(n-3).$$

De lijn l is in dit geval

$$[\tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)-1]\text{-voudig.}$$

In het punt S_3 zijn nu $(n-3)$ raakvlakken. De ruimtekromme is $(n-3)$-voudige lijn op O.

De dubbelkromme (Q) is nu van den *graad*

$$\tfrac{1}{8}(n-3)(n-4)(n-5)(3n-10).$$

[Elke bisecante $S_3 S_4$ bepaalt met l een vlak en aan iedere bisecante zijn dus $(n-4)$ punten $S_5 \ldots\ldots S_n$ toegevoegd, terwijl door elk punt S_3 en l één vlak gaat, dat nog $(n-3)$ punten $S_4 \ldots\ldots S_n$ bepaalt of $\frac{1}{2}(n-3)(n-4)$ bisecanten.]

Nemen we een *tris*cante $S_1 S_2 S_3$ als *as* eener vlakkenbundel dan wordt op de R_n eene I_{n-3} bepaald. De trisecante zelf is een $[\frac{1}{2}(n-1)(n-2)-3]$-voudige lijn op het oppervlak der bisecanten, dat nu van den *graad*

$$(n-1)^2 - 3(n-1) = (n-1)(n-4) \text{ is.}$$

Is het punt S_4 zijn nu $(n-4)$ raakvlakken. De R_n is op O een $(n-4)$-voudige lijn. De *graad* der dubbelkromme (Q) zal zijn

$$\tfrac{1}{8}(n-6)(n-4)(n-5)(3n-13).$$

---

§ 6. Oppervlak der Trisecanten.

Om den graad n' van het oppervlak der trisecanten te vinden, beschouwen wij de verwantschap tusschen twee op een zelfde trisecante gelegen punten P_k en zoeken het aantal

paren welke zij gemeen heeft met de axiale involutie I_n bepaald door een willekeurige lijn a.

Uit elk punt P_1 der R_n gaan $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$ trisecanten waarop $(n-2)(n-3)$ punten P_2, P_3.

De symmetrische verwantschap tusschen de punten P_k heeft dus tot symbool

$$[(n-2)(n-3)],$$

Zij heeft met de axiale I_n

$$(n-1)(n-2)(n-3)$$

paren gemeen. Maar met één trisecante vallen drie koorden samen. De lijn a wordt derhalve door

$$\frac{1}{3}(n-1)(n-2)(n-3)$$

trisecanten gesneden.

De *graad* van het trisecantenregelvlak blijkt dus te zijn

$$n' = \frac{1}{3}(n-1)(n-2)(n-3).$$

Een vlakke doorsnede ϕ is van den zelfden graad n'. De ruimtekromme zelf is een $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$-voudige $=$ p-voudige kromme op het regelvlak. De in ϕ gelegen kromme is dus van geslacht

$$\frac{(n'-1)(n'-2)}{1.\ 2.} - n \times \frac{p(p-1)}{2.}.$$

§ 7. Normalen der R_n.

Staat de lijn PQ in het punt Q loodrecht op de ruimtekromme dan zal de bol met centrum P en straal PQ de R_n in het voetpunt Q der normaal aanraken. Is het punt P een *vast* punt, dan bepaalt elk punt Q der ruimtekromme één bol met centrum P, en deze bol geeft meteen nog $(2n-1)$ punten op R_n aan. Zoo worden de punten der ruimtekromme gerangschikt in een I_{2n} door middel van concentrische bollen. Deze involutie bezit $2(2n-1) = 4n-2$ dubbelpunten, die evenwel niet alles op normalen door P wijzen. Immers het vlak in 't oneindige, dubbel geteld, is

de ontaardingsvorm die de bol met oneindig groote straal oplevert; de *n* snijpunten der R_n met het vlak in 't oneindige geven dus *geen* normalen ofschoon die snijpunten dubbelpunten der I_{2n} zijn.

St: «Door elk willekeurig punt P der ruimte gaan derhalve (3 n — 2) normalen».

Uit elk punt van een willekeurige lijn *l* gaan (3 n — 2) normalen.

Een vlak ϕ door *l* geeft *n* snijpunten S met R_n. Het normaalvlak in S snijdt ϕ volgens een lijn die in S normaal is. De lijn *l* wordt nu blijkbaar door *n* in ϕ gelegen normalen gesneden.

De *graad* van het regelvlak O. der normalen die allen de willekeurige lijn *l* snijden is dus

$$(4\,n - 2).$$

Op het regelvlak O komt voor een *dubbel*kromme Q. Elk vlak door *l* geeft *n* normalen gelegen in dat vlak; dus $\frac{n\,(n-1)}{1.\,2.}$ snijpunten, die nu dubbelpunten Q zijn d. w. z. punten Q waaruit *twee* normalen gaan.

Maar op de lijn *l* komen ook zulke punten Q te liggen.

Wijs ik de *n* snijpunten van *l* met de *n* normalen die in elk vlak door *l* zijn gelegen, door de letters $T_1 \ldots T^n$ aan dan bestaat tusschen de op *l* gelegen punten T een symmetrische verwantschap. Uit T_1 gaan 3 (n — 2) normalen, die (3 n — 2) vlakken ϕ door *l* bepalen, terwijl in elk vlak ϕ weer (n — 1) punten T_k liggen.

Het kenmerkende getal der genoemde verwantschap is dus

$$[(3\,n - 2)\,(n - 1)]$$

met 2 (n — 1) (3 n — 2) coïncidenties welke dan dubbelpunten zijn die op *l* liggen. Doch is *D* zoo'n coïncidentie, dan liggen twee normalen door D in één vlak met *l* en bij elk dier beide normalen behooren nu (n — 2) toegevoegde punten, in plaats van (n — 1). Zoo'n punt *D* is derhalve een *dubbele* coïncidentie. Op de lijn *l* liggen zoodoende

$$(n - 1)\,(3\,n - 2)$$

punten Q, waardoor ten slotte blijkt dat de *graad* van (Q) is

$$\frac{1}{2} n (n - 1) + (n - 1)(5 n - 2) = \frac{1}{2} (n - 1)(7 n - 4).$$

Beschouwen we thans het regelvlak gevormd door de normalen die op een bepaalde *kegelsnede* k_2 rusten. Uit elk punt van k_2 gaan weder $(3 n - 2)$ normalen, zoodat k_2 een $(3 n - 2)$-voudige lijn is op het gezochte regelvlak. Het vlak der kegelsnede zelf bevat weder n normalen, die elk den omtrek van k_2 tweemaal snijden en dus voor $2 n$ exemplaren zijn te tellen. We vinden zoo voor den *graad* van het oppervlak der normalen, die op een gegeven kegelsnede rusten,

$$(3 n - 2) \times 2 + 2 n = 8 n - 4 = 4 (2 n - 1).$$

Uit elk punt P der ruimtekromme gaan $(3 n - 2)$ normalen, die in een ander punt der kromme loodrecht staan. Het normaalvlak in P snijdt n punten in op de R_n; en de $(n - 1)$ buiten P gelegen punten Q bepalen normalen, die in P loodrecht staan. Dus uit die $(n - 1)$ punten Q kan men $(n - 1)$ normalen *in P* trekken. Maar zooals gezegd gaan uit elk punt Q ...... $(3 n - 2)$ normalen op R_n. Bij één punt Q behooren derhalve $(3 n - 2)$ punten P en bij één punt P ...... $(n - 1)$ punten Q.

Dit geeft een overeenkomst (P, Q) van den vorm

$$[(3 n - 2), (n - 1)].$$

Deze verwantschap bezit

$$\frac{1}{2} (3 n - 2)(3 n - 2 - 1) + \frac{1}{2} (n - 1)(n - 1 - 1) =$$
$$\frac{1}{2} (5 n - 2) . 3 . (n - 1) + \frac{1}{2} (n - 1)(n - 2) =$$
$$\frac{1}{2} (n - 1) . 2 . (5 1 - 4) = (n - 1)(5 n - 4)$$

involutorische paren.

Is $(R S)$ zoo'n paar dan wil dat zeggen dat met het punt R zoowel als punt van het stelsel P als als punt van het stelsel Q steeds het punt S overeenkomt. Dat komt hierop neer dat de verbindingslijn R S in R èn in S normaal is, of dat zij *dubbel*normaal is. Er zijn alzoo $(n - 1)(5 n - 4)$ dubbelnormalen.

STELLINGEN.

Stellingen.

I.

Voor *niet*-rationale krommen gaan de eigenschappen der involuties, in dit proefschrift behandeld, niet meer door.

II.

Het beschouwen van involuties met *veelvoudige* punten zal nog belangrijke uitkomsten kunnen geven.

III.

De leer der verwantschappen is voor de synthetische behandeling der rationale krommen van veel belang.

IV.

Het is verkeerd *duale* beschouwingen overbodig te achten.